

UNIVERSIDAD CARLOS III MADRID



Ingeniería Industrial Superior

PROYECTO DE FIN DE CARRERA

**Determinación del campo de presiones
radiado por una nube de burbujas**

Autor: Víctor Delgado Carriedo
Tutor: Javier Rodríguez Rodríguez

ÍNDICE

1. Introducción	pág. 4
2. Oscilación radial de una burbuja	pág. 5
2.1. Descripción del problema, ecuaciones y fundamentos	pág. 6
2.2. Resolución numérica	pág. 12
-Planteamiento	pág. 12
-Resolución	pág. 14
-Resultados y conclusiones	pág. 15
2.3. Resolución analítica (linealización)	pág. 18
-Planteamiento	pág. 18
-Resolución	pág. 20
-Resultados y conclusiones	pág. 24
3. Campo de presiones alrededor de una burbuja	pág. 26
3.1. Descripción del problema, ecuaciones y fundamentos	pág. 26
3.2. Resolución	pág. 28
-Presión de la onda	pág. 31
-Presión radiada	pág. 35
-Presión total	pág. 40
3.3. Resultados numéricos, comentarios y conclusiones	pág. 46
4. Campo de presiones alrededor de una nube de burbujas	pág. 48
4.1. Descripción del problema, ecuaciones y fundamentos	pág. 48
4.2. Resolución: Cálculo de amplitudes complejas	pág. 50

4.3.	Resultados numéricos y comentarios	pág. 51
	-Caso 1	pág. 53
	-Caso 2	pág. 58
	-Caso 3	pág. 60
	-Caso 4	pág. 62
	-Caso 5	pág. 63
	-Caso 6	pág. 66
4.4.	Conclusiones finales	pág. 70
4.5.	Aplicaciones y líneas de continuación	pág. 71
5.	Bibliografía	pág. 72

1. Introducción

Se conoce como burbuja al ente o cuerpo de forma esférica o esferoidal que se encuentra en el seno de un fluido o sólido. Podemos encontrar multitud de ejemplos cotidianos de este extendido y a la vez fascinante mundo de las burbujas, véase la universal pompa de jabón brotando de los juguetes de infinidad de niños en los parques urbanos o aquellas surgidas de nuestros propios pulmones al exhalar el aire mientras nos sumergimos en un refrescante baño de verano. Podemos a su vez encontrar burbujas como ejemplos menos importantes en nuestra vida diaria pero tremendamente fundamentales para la ciencia hoy en día, por poner algún ejemplo encontramos las burbujas de hidrógeno que nacen en un electrodo embebido en agua producido por la famosa reacción de electrólisis del agua, o incluso a veces en casos más perjudiciales en los interés de una industria, como en el caso de la metalurgia las indeseadas burbujas de gases que quedan atrapadas en el proceso de solidificación de un metal y que lo debilitan.

Así pues lo que a priori parece un objeto de estudio de poco alcance, resulta ser un mundo de infinitas posibilidades e intensos estudios. Entre los fenómenos que involucran a las burbujas se encuentra la espectacular y a la par destructiva cavitación, que se da cuando una burbuja implota de manera súbita y que en el caso de las hélices de los barcos resulta un fenómeno muy perjudicial ya que produce erosión y picaduras en las palas motrices, al producirse de manera local incrementos elevados de la presión. Sin embargo en el campo de la sonoquímica, la sonoluminiscencia representa un caso extremo de cavitación y podría ser un fenómeno trascendental en el futuro de la energía sostenible, al ser uno de los objetos de estudio para la producción de la fusión nuclear. Dicho fenómeno se produce cuando ultrasonidos de alta frecuencia producen burbujas en su estela, alguna de ellas puede implotar y producen un incremento súbito de temperatura que produce una ionización del gas que contiene la burbuja produciendo un destello de luz, y de ahí el nombre de sonoluminiscencia.

En cuanto al objeto de estudio de este proyecto nos centraremos en diversos fenómenos que se producen en burbujas esféricas gaseosas embebidas en un líquido, en este caso burbujas de aire en agua, debido a la excitación de éstas por medio de ultrasonidos en el régimen lineal. Los fenómenos son la oscilación del tamaño de la burbuja y los gradientes de presión que interactúan entre una, dos o más burbujas cercanas.

2. Oscilación radial de una burbuja

2.1 Descripción del problema, ecuaciones y fundamentos.

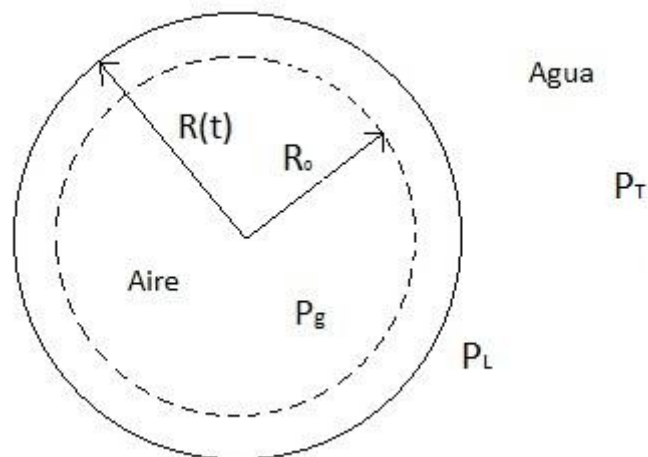


Figura 1. Burbuja de aire

Tengamos una burbuja de aire inmersa en agua como la del a figura 1. Suponemos que la P_T es la suma de la presión estática más la de una onda acústica incidente. Las ecuaciones que rigen el movimiento del a pared de la burbuja así como del fluido a su alrededor son las archiconocidas ecuaciones de Navier-Stokes que recuerdo a continuación:

- Continuidad $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1.1)$

- C. de mov. $\rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = -\nabla P + \nabla \cdot \vec{\tau}' + \rho \vec{f}_m$ (2.1.2)

Utilizaremos un sistema de coordenadas esférico (r, θ, φ) con origen el centro de la burbuja y además aplicaremos ciertas hipótesis para simplificar las ecuaciones.

En primer lugar supongamos simetría esférica. Es decir la burbuja mantiene su forma esférica en la totalidad de las oscilaciones y el movimiento de la pared de la burbuja y del agua a su alrededor se produce en dirección únicamente radial. Esto se traduce en que $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ son nulas así como las velocidades v_θ y v_φ .

Asumamos flujo incompresible, para ello haremos la hipótesis de que la velocidad de la pared de la burbuja es mucho menor que la velocidad del sonido y por ello se desprecia el efecto de la compresibilidad y la densidad del agua la suponemos constante.

Por último consideraremos nula la transferencia de calor entre el aire interior de la burbuja y el agua. A su vez supongamos que el aire se comporta como un gas ideal.

Con estas consideraciones y desarrollando las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2) en coordenadas esféricas tenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} \quad (2.1.4)$$

En primer lugar (1.1.3) da lugar a $r^2 v_r = k(t)$ siendo k una constante arbitraria que únicamente depende del tiempo. Imponiendo que en la pared de la burbuja $r = R$, la velocidad de ésta y del agua debe coincidir, es decir que $v_r = \frac{\partial R}{\partial t} = \dot{R}$ tenemos que:

$$v_r = \frac{\dot{R} R^2}{r^2} \quad (2.1.5)$$

Además:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\ddot{R} R^2 + 2R\dot{R}^2}{r^2} \quad (2.1.6)$$

Con todo esto la ecuación (2.1.4) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} \right) = - \frac{\ddot{R} R^2 + 2R\dot{R}^2}{r^2} \quad (2.1.7)$$

Integrando ambos miembros de la ecuación entre R y el infinito tenemos y combinándolo con (2.1.5) tenemos:

$$\frac{P_L - P_T}{\rho} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \quad (2.1.8)$$

Nótese que al integrar la presión, integramos entre un punto genérico situado justo en el exterior de la burbuja y de radio R y el infinito.

Por otro lado para relacionar este resultado con la presión en el interior de la burbuja hay que hacerlo con el salto de presiones en la interfase de la burbuja $P_g - P_L$. Para ello suponemos dicha interfase como una lamina delgada de espesor despreciable como la siguiente:

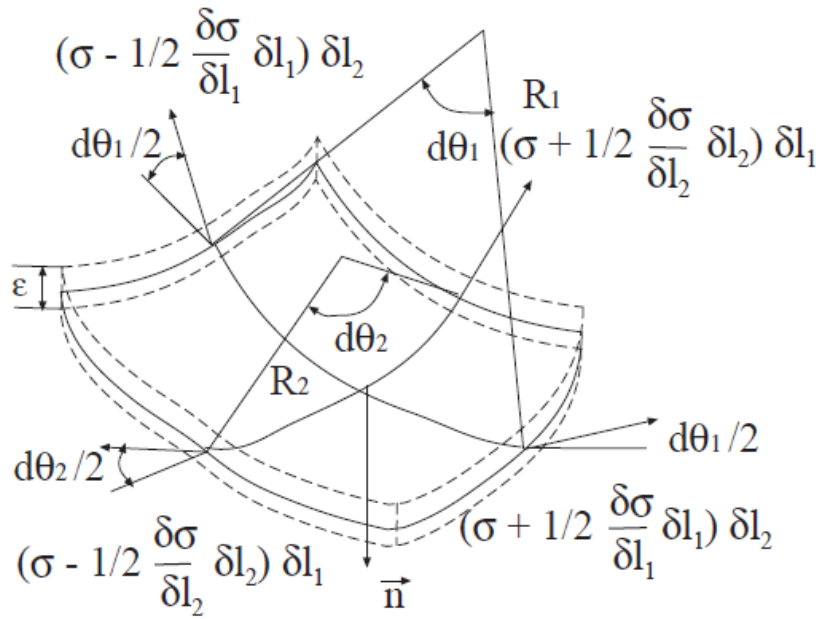


Figura 2. Fuerza debida a la tensión superficial actuando en la interfase de dos fluidos.

Para la condición de equilibrio de fuerzas en dirección normal en la interfase se debe cumplir que:

$$(P_g + P_v - P_L) + \vec{n} \cdot (\bar{\tau}'_L - \bar{\tau}'_G) \cdot \vec{n} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.1.9)$$

La expresión (2.1.9) refleja que la diferencia entre las fuerzas ocasionadas por las presiones y los esfuerzos viscosos en cada uno de los lados de la interfase deben ser soportados por la tensión superficial actuando en la lámina delgada. Los esfuerzos viscosos en el aire $\bar{\tau}'_G$ son despreciables por la baja viscosidad del gas.

Por otro lado se puede demostrar que el tensor de esfuerzos $\bar{\tau}'_L$ en coordenadas cilíndricas y para las condiciones de axil-simetría queda:

$$\begin{bmatrix} 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 2\eta \frac{v_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta \frac{v_r}{r} \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que el vector normal a la interfase es $\vec{n} = (1,0,0)$ y además que en una burbuja esférica $R_1 = R_2 = R$ la expresión (1.1.9) da lugar a:

$$(P_g + P_v - P_L) + 2\eta \left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{2\sigma}{R} \quad (2.1.11)$$

$$2\eta \left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{4\eta \dot{R}}{R} \quad (2.1.12)$$

Finalmente sólo queda relacionar la presión P_g del gas en cada instante de tiempo en función de los parámetros del problema. Como dijimos al principio al enumerar las hipótesis asumimos que el gas del interior de la burbuja se comporta como un gas ideal y que despreciamos la transferencia de calor entre el aire y el agua. Con eso podemos suponer que la evolución del gas entonces será isentrópica:

$$P_g = P_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \quad (2.1.13)$$

Siendo γ el coeficiente adiabático del gas que supondremos como la unidad ya que el proceso se puede considerar isoterma.

P_{g0} es la presión del gas en el equilibrio estático, es decir en el instante inicial, cuando la velocidad es nula y no hay onda de presión acústica, entonces:

$$P_{g0} + P_v - P_0 = \frac{2\sigma}{R} \quad (2.1.14)$$

Con (2.1.12), (2.1.13) y (2.1.14) la presión en las proximidades exteriores de la burbuja puede escribirse:

$$P_L = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\eta\dot{R}}{R} \quad (2.1.15)$$

Teniendo en cuenta que $P_T = P_0 + P(t)$ finalmente la ecuación (2.1.8) da lugar a la ecuación de Rayleigh-Plesset:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\eta\dot{R}}{R} - P_0 - P(t) \right\} \quad (2.1.16)$$

Con:

$\rho = \text{densidad del líquido}$

$\sigma = \text{tensión superficial de la interfase líquido—gas}$

$\gamma = \text{coeficiente adiabático del gas del interior de la burbuja}$

$\eta = \text{viscosidad dinámica del líquido}$

$R_0 = \text{radio de equilibrio de la burbuja } (t = 0)$

$R = \text{radio de la burbuja en un instante dado}$

$P_0 = \text{presión estática}$

$P_v = \text{presión de vapor del gas del interior de la burbuja}$

$$P(t) = \text{onda de presión acústica}$$

En lo que sigue utilizaremos como valor representativos de los parámetros los siguientes:

$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\sigma = 0.072 \frac{N}{m}$$

$$\gamma = 1 \text{ (aproximación a proceso isoterma)}$$

$$\eta = 0.001 \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$c \text{ (velocidad del sonido)} = 1540 \frac{m}{s}$$

$$R_0 = 10 \mu m$$

$$P_0 = 101325 Pa$$

$$P_v = 0 Pa$$

$$P(t) = 10^4 \sin(\omega t) Pa$$

$$\omega \text{ (frecuencia de insonación)} = 2\pi \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$$

Como podemos ver en la expresión (2.1.16) estamos ante una ecuación diferencial de segundo orden y no lineal para la evolución temporal del radio $R(t)$ de una burbuja de un cierto gas sumergido en un líquido, ambos fluidos con propiedades anteriormente citadas, ante la acción de una onda de presión $P(t)$.

Puesto que se trata de una ecuación de segundo orden y no lineal, la resolución analítica de dicha ecuación se antoja inalcanzable y por lo tanto podríamos seguir dos caminos para su resolución.

El primero de ellos sería la resolución por métodos numéricos de la ecuación completa y el segundo sería linealizar la ecuación para tratar de

resolverla analíticamente. Aquí procederemos por ambos métodos para asegurar la veracidad de los resultados pero anticipar de forma breve que para pequeñas oscilaciones, como van a ser las del objeto de estudio, la burbuja se comporta prácticamente igual que un oscilador amortiguado y por lo tanto la resolución analítica de la ecuación linealizada y la numérica de la completa son prácticamente idénticas.

2.2 Resolución numérica

- Planteamiento

Partiendo de la ecuación completa (2.1.16) adimensionalizaremos el problema para facilitar los cálculos. En nuestro caso $P(t)$ es una onda senoidal de presión de una cierta frecuencia angular ω y amplitud P_A . Así pues para adimensionalizar el tiempo t y el radio R utilizaremos ω^{-1} como tiempo característico y R_0 como longitud característica respectivamente. En lo que resta las variables adimensionalizadas estarán enfatizadas con asterisco.

$$R = R_0 R^* \quad (2.2.1)$$

$$t = \frac{t^*}{\omega} \quad (2.2.2)$$

Así las derivadas quedan adimensionalizadas de la siguiente forma:

$$\dot{R} = \omega R_0 \dot{R}^* \quad (2.2.3)$$

$$\ddot{R} = \omega^2 R_0 \ddot{R}^* \quad (2.2.4)$$

Introduciendo estos cambios la ecuación (2.1.16) queda:

$$\omega^2 R_0^2 \left\{ R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{*2} \right\} = \frac{1}{\rho} \left\{ \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) (R^*)^{-3\gamma} + P_v - \frac{2\sigma}{R_0 R^*} - \frac{4\eta\omega\dot{R}^*}{R^*} - P_0 - P(t) \right\} \quad (2.2.5)$$

La ecuación anterior deja los siguientes parámetros adimensionales:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\rho\omega^2 R_0^3} \quad (2.2.6)$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{\frac{1}{4}\rho\omega R_0^2} \quad (2.2.7)$$

$$P^* = \frac{P_0 - P_v}{\frac{1}{2}\rho\omega^2 R_0^2} \quad (2.2.8)$$

$$P_A^*(t) = \frac{P(t)}{\frac{1}{2}\rho\omega^2 R_0^2} \quad (2.2.9)$$

Introduciéndolos en la ecuación (2.2.5) queda:

$$R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{*2} = (P^* + \sigma^*) (R^*)^{-3\gamma} - P^* - \frac{2\sigma^*}{R^*} - \frac{\eta^* \dot{R}^*}{R^*} - P_A^*(t) \quad (2.2.10)$$

Hasta ahora no habíamos hablado de condiciones iniciales que obviamente son necesarias para la resolución de la ecuación. En principio éstas son arbitrarias mientras sean compatibles con la física del problema, en nuestro caso consideraremos las más evidentes. Una de ellas es que en el instante inicial tendremos una burbuja de radio $R = R_0$, además el hecho de ser una ecuación diferencial de segundo orden nos obliga a imponer una condición inicial en la primera derivada. Como indicamos al principio de la demostración de la ecuación de Rayleigh-Plesset asumimos que la burbuja mantiene la forma esférica en todas sus oscilaciones, la hipótesis de axil-simetría refleja fielmente el comportamiento real de la burbuja. Si esto es cierto, los movimientos de las paredes de la burbuja en cada instante son siempre en dirección radial y por tanto la velocidad de la pared de la burbuja en cada instante es:

$$V_{pared} = \frac{dR}{dt} = \dot{R} \quad (2.2.11)$$

Ahora bien, en el instante inicial impondremos que la pared esta quieta, es decir no tiene velocidad. De esta forma las condiciones iniciales adimensionalizadas quedan:

$$R^*(t^* = 0) = 1 \quad (2.2.12)$$

$$\dot{R}^*(t^* = 0) = 0 \quad (2.2.13)$$

- Resolución

El problema podría considerarse cerrado a falta de conocer los valores característicos de las propiedades fluidas que darían el valor a los grupos adimensionales. Su resolución sería puramente numérica. Recopilando tenemos:

$$R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{*2} = (P^* + \sigma^*)(R^*)^{-3\gamma} - P^* - \frac{2\sigma^*}{R^*} - \frac{\eta^* \dot{R}^*}{R^*} - P_A^*(t) \quad (2.2.10)$$

$$R^*(t^* = 0) = 1 \quad (2.2.12)$$

$$\dot{R}^*(t^* = 0) = 0 \quad (2.2.13)$$

Procederemos entonces a plantear el esquema numérico que resuelva el problema en cuestión. Para ello utilizaremos el método de Runge-Kutta cuya implementación podría ser propia pero en nuestro caso puesto que vamos a utilizar MatLab para todos los cálculos numéricos utilizaremos un comando propio denominado ode45 el cuál es una versión optimizada de Runge-Kutta de 4º orden y paso variable.

En cualquier caso hay que presentar el problema de una forma determinada para ejecutar el comando. Puesto que se trata de una ecuación de 2º orden tenemos que desacoplar la ecuación en un sistema de ecuaciones de 1º orden. Para ello hacemos las siguientes asignaciones:

$$f_1 = R^* \quad (2.2.14)$$

$$f_2 = \dot{R}^* \quad (2.2.15)$$

$$f_3 = \ddot{R}^* \quad (2.2.16)$$

Así podemos escribir la ecuación completa como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en función de f_1 y f_2 de la siguiente forma:

$$\dot{f}_1 = f_2 \quad (2.2.17)$$

$$\dot{f}_2 = f_3 = (P^* + \sigma^*)(f_1)^{-3\gamma-1} - P^*f_1 - \frac{\sigma^*}{f_1^2} - \frac{\eta^*f_2}{f_1^2} - \frac{PA^*(t)}{f_1} - \frac{3f_2^2}{f_1^{-1}} \quad (2.2.18)$$

$$f_1(0) = 1 \quad (2.2.19)$$

$$f_2(0) = 0 \quad (2.2.20)$$

- Conclusiones y resultados

Escribiéndolas anteriores expresiones de la manera adecuada el comando ode45 de MatLab, por ejemplo desde aquí se sugiere ejecutar la ayuda para ver la sintaxis del comando, nos resuelve el sistema de forma numérica.

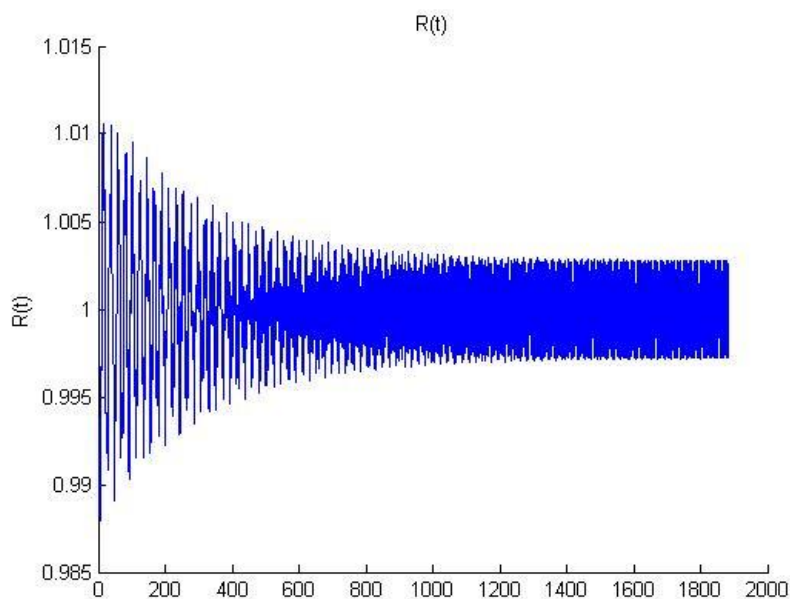


Figura 3. Evolución temporal del radio adimensional de la burbuja.

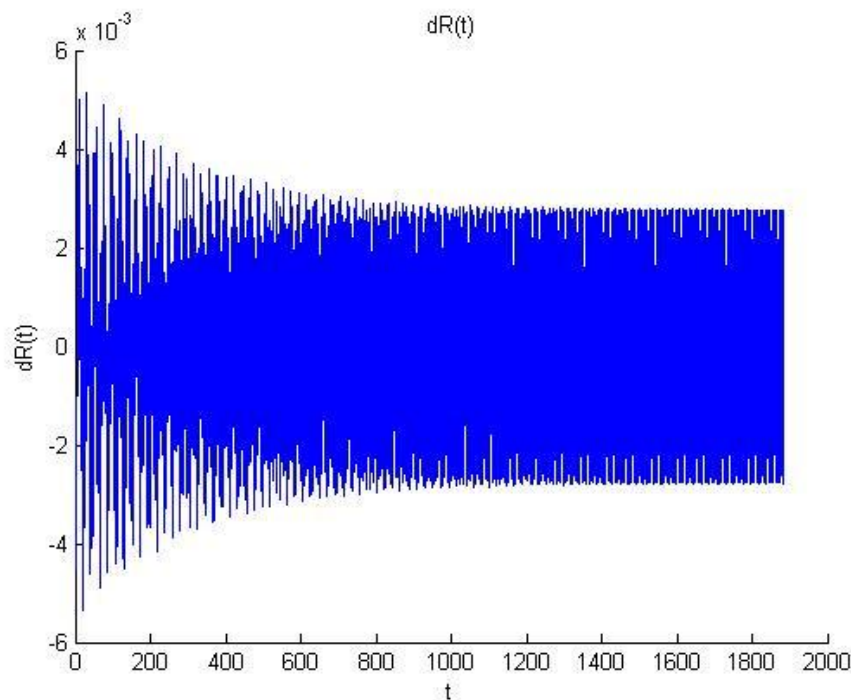


Figura 4. Evolución temporal de la velocidad adimensional de la pared de la burbuja.

Primero recalcar que los resultados anteriormente mostrados son adimensionales, tanto el tiempo como las oscilaciones.

Por último explicar que el motivo de presentar los anteriores resultados y en lo que sigue todos los demás de manera adimensional tiene dos motivos principales.

El primero es una limitación en la simulación que introduce MatLab. El problema radica en que si intentamos representar funciones propias (senos, cosenos, exponenciales...) con números muy grandes, cosa que se daría al introducir por ejemplo dentro de la función seno la frecuencia de excitación del orden de megahercios, se produce inestabilidad propia de la forma en que MatLab resuelve dichas funciones y se devuelve un error.

El segundo es un problema de escalas y se debe a que en los siguientes apartados representaremos la solución mediante curvas de nivel para las funciones de 3 variables. Diferencias muy grandes entre los valores máximos y mínimos haría imposible su representación porque se perdería información en la escala cromática que se utiliza.

En cualquier caso es común en los problemas de mecánica de fluidos en particular resolver los problemas de forma adimensional. La adimensionalización es una herramienta muy potente, que permite comparar órdenes de magnitud, unidades, escalas características, soluciones de semejanza y muchas otras cosas con unas simples operaciones. En nuestro caso permitirán sacar conclusiones muy intuitivas a través de valores numéricos a priori muy poco transparentes. De esta forma por ejemplo podemos identificar entre los números adimensionales diferentes comportamientos en función de su estructura, así por ejemplo el termino $\eta^* = \frac{\eta}{\frac{1}{4}\rho\omega R_0^2}$ que nos surgió de forma natural en el problema no es más que un número de Reynolds que compara los fenómenos de disipación viscosa en las inmediaciones de la pared de la burbuja con los de transporte por el movimiento de dicha pared.

Los valores numéricos de los grupos adimensionales son:

$$\sigma^* = 0,0036$$

$$\eta^* = 0,0064$$

$$P^* = 0,026$$

$$P_A^* = 0,0025$$

A la vista de estos resultados se puede ver claramente cuales son los efectos que intervienen de forma más notoria en el comportamiento de la burbuja. Puesto que la presión P^* es un término estático se puede ver que de los demás el efecto de la viscosidad es bastante apreciable prácticamente como el doble que el de la tensión superficial σ^* o el triple del efecto de la presión de la onda P_A^* .

En segundo lugar se puede observar dos partes claramente diferenciadas en las dos gráficas, aunque el efecto es más notorio en la primera. Esto se debe al amortiguamiento producido por la viscosidad del agua que introduce un periodo transitorio hasta que la oscilación de la burbuja se estabiliza entre unos valores que permanecen constantes y que vienen dados por la frecuencia de excitación. Adelantar que a la vista de la gráfica y como veremos posteriormente en la ecuación linealizada podemos ver que el comportamiento de la burbuja para este régimen de frecuencias es la de un oscilador forzado y amortiguado.

Por otro lado se puede ver que las oscilaciones del radio de la burbuja son del orden del 1% en el periodo transitorio y del 0.5% en el régimen permanente. Es importante que para el régimen de frecuencias y amplitudes del estudio estas oscilaciones se mantengan entre unos márgenes pequeños, como es el caso, ya que una oscilación excesiva rompería la simetría del problema y no se podría aplicar la hipótesis de linealidad. Las variaciones de la velocidad de la pared de la burbuja son más constantes en los dos periodos y mucho más reducidas.

2.3 Resolución analítica (linealización)

- Planteamiento

En este apartado trataremos de linealizar la ecuación de Rayleigh-Plesset para tratar de resolverla analíticamente y poder comparar los resultados con la resolución numérica. El motivo es demostrar que efectivamente la aproximación de la ecuación lineal es suficientemente precisa ya que en lo siguiente necesitaremos trabajar con ella.

Así partimos de la ecuación (2.1.16), que recordamos a continuación:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\eta\dot{R}}{R} - P_0 - P(t) \right\} \quad (2.1.16)$$

Escribiendo el radio de la burbuja como:

$$R(t) = R_0(1 + X(t)) \quad (2.3.1)$$

Como hemos podido ver en la simulación numérica las oscilaciones en el régimen permanente son del orden del 0,5% con lo que asumimos la hipótesis de régimen lineal que es:

$$|X(t)| \ll 1 \quad (2.3.2)$$

De esta forma linealizamos término a término teniendo en cuenta las aproximaciones anteriores:

$$R\ddot{R} = R_0^2(1+X)\ddot{X} \approx R_0^2\ddot{X} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{3}{2}R_0\dot{X}^2 \approx 0 \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} &= \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v\right)\left(\frac{R_0}{R_0(1+X)}\right)^{3\gamma} \approx \\ &\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v\right) \cdot (1 - 3\gamma X) \quad (2.3.5) \end{aligned}$$

$$\frac{4\eta\dot{R}}{R} = \frac{4\eta R_0\dot{X}}{R_0(1+X)} \approx 4\eta\dot{X} \quad (2.3.6)$$

$$\frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{R_0(1+X)} \approx \frac{2\sigma}{R_0} (1 - X) \quad (2.3.7)$$

Así reagrupando y operando los términos el problema linealizado queda:

$$\rho R_0^2 \ddot{X} + 4\eta \dot{X} + \left[\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v\right) 3\gamma - \frac{2\sigma}{R_0}\right] X = -P(t) \quad (2.3.8)$$

$$X(0) = 0 \quad (2.3.9)$$

$$\dot{X}(0) = 0 \quad (2.3.10)$$

Como podemos ver se trata de la ecuación de un oscilador forzado con amortiguamiento, como ya habíamos adelantado anteriormente.

El amortiguamiento viene dado por la disipación viscosa del agua que frena la oscilación de la burbuja .

- Resolución

En primer lugar para ser coherentes y poder contrastar resultados con la solución numérica, adimensionalizamos el problema.

$$t = \frac{t^*}{\omega} \quad (2.3.11)$$

$$\ddot{X} + \frac{B}{\omega} \dot{X} + \frac{C}{\omega^2} X = \frac{-P(t^*)}{\rho R_0^2 \omega^2} \quad (2.3.12)$$

$$B = \frac{4\eta}{\rho R_0^2} \quad (2.3.13)$$

$$C = \frac{\left[\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) 3\gamma - \frac{2\sigma}{R_0} \right]}{\rho R_0^2} \quad (2.3.14)$$

Aplicando el principio de superposición, la solución de la ecuación completa:

$$S_{completa} = S_{homógena} + S_{particular} \quad (2.3.15)$$

- $S_{homogénea}$

La homogénea queda de la siguiente manera:

$$\ddot{X} + \frac{B}{\omega} \dot{X} + \frac{C}{\omega^2} X = 0 \quad (2.3.16)$$

Buscamos soluciones del tipo $S_h(t^*) = \alpha e^{\beta t^*}$ y resolviendo la ecuación

característica:

$$\beta^2 + \frac{B}{\omega}\beta + \frac{C}{\omega^2} = 0 \quad (2.3.17)$$

$$\beta = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2\omega} \quad (2.3.18)$$

Así la solución de la homogénea queda:

$$S_h(t^*) = \alpha_1 e^{\frac{-Bt^*}{2\omega}} e^{j\frac{\omega_0}{\omega}t^*} + \alpha_2 e^{\frac{-Bt^*}{2\omega}} e^{-j\frac{\omega_0}{\omega}t^*} \quad (2.3.19)$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2} = \sqrt{\left| \frac{4\eta^2}{\rho^2 R_0^4} - \frac{\left[\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) 3\gamma - \frac{2\sigma}{R_0} \right]}{\rho R_0^2} \right|} \quad (2.3.20)$$

Siendo (2.3.20) la frecuencia natural de la burbuja. A dicha frecuencia de excitación conseguiremos la máxima oscilación del radio de la burbuja.

Nótese que en la ecuación (2.3.19) tan sólo queda determinar los parámetros α_1 y α_2 . Su valor quedará fijado por las condiciones iniciales. En cualquier caso podemos hacer varios cambios de variable y reordenaciones para presentar la solución en forma real y más intuitiva.

Así reordenando la ecuación (2.3.19) y aplicando la fórmula de Euler $e^{a+jb} = e^a(\cos(b) + j\sin(b))$ tenemos:

$$S_h(t^*) = e^{\frac{-Bt^*}{2\omega}} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) \cos\left(\frac{\omega_0}{\omega}t^*\right) + j(\alpha_1 - \alpha_2) \sin\left(\frac{\omega_0}{\omega}t^*\right) \right] \quad (2.3.21)$$

Haciendo las siguientes asignaciones podremos poner la solución en forma real:

$$\alpha_1 = \frac{b - ja}{2} \quad (2.3.22)$$

$$\alpha_2 = \frac{b + ja}{2} \quad (2.3.23)$$

Despejando:

$$b = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.3.24)$$

$$a = j(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (2.3.25)$$

Con éstos cambios de variable podemos escribir la solución homogénea como:

$$S_h(t^*) = e^{\frac{-Bt^*}{2\omega}} \left[b \cos\left(\frac{\omega_0}{\omega} t^*\right) + a \sin\left(\frac{\omega_0}{\omega} t^*\right) \right] \quad (2.3.26)$$

Resignando nuevamente:

$$b = \gamma \sin(\varphi) \quad (2.3.27)$$

$$a = \gamma \cos(\varphi) \quad (2.3.28)$$

Con estos últimos cambios y aplicando la identidad trigonométrica del seno de la suma de dos ángulos podemos presentar la solución homogénea finalmente de la manera deseada, que es:

$$S_h(t^*) = \gamma e^{\frac{-Bt^*}{2\omega}} \left[\sin\left(\frac{\omega_0}{\omega} t^* + \varphi\right) \right] \quad (2.3.29)$$

Por último recalcar que la solución vuelve únicamente a depender de dos nuevos parámetros (combinación de α_1 y α_2) que son γ y φ y que de la misma forma que al principio se determinarán mediante las condiciones iniciales una vez tengamos la solución completa.

- $S_{particular}$

Se pueden utilizar varios métodos analíticos para determinar la solución particular. Aquí al tratarse de una ecuación de relativa sencillez, aplicaremos la intuición y la experiencia.

Como vimos en la presentación de los parámetros de simulación $P(t^*) = P_A \text{sen}(t^*)$, con lo cuál la ecuación completa queda:

$$\ddot{X} + \frac{B}{\omega} \dot{X} + \frac{C}{\omega^2} X = Q \text{sen}(t^*) \quad (2.3.30)$$

$$Q = -\frac{P_A}{\rho R_0^2 \omega^2} \quad (2.3.31)$$

A la vista de la estructura de la ecuación completa buscamos soluciones particulares de la forma:

$$S_p(t^*) = \alpha \text{sen}(t^* + \delta) \quad (2.3.32)$$

Así sustituyendo en (2.3.30) tenemos:

$$\alpha \left(\frac{C}{\omega^2} - 1 \right) \text{sen}(t^* + \delta) + \alpha \frac{B}{\omega} \cos(t^* + \delta) = Q \text{sen}(t^*) \quad (2.3.33)$$

Puesto que se trata de una solución particular de la ecuación completa, ésta debe estar perfectamente determinada mediante las condiciones iniciales, con lo cual para determinar los parámetros α y δ las imponemos.

Así pues tenemos que:

$$- \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha \left(\frac{C}{\omega^2} - 1 \right) \text{sen}(\delta) + \alpha \frac{B}{\omega} \cos(\delta) = 0$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{B\omega}{C-\omega^2}\right) \quad (2.3.34)$$

$$- \quad \omega t + \delta = 0 \rightarrow \alpha B \omega = Q \operatorname{sen}(-\delta)$$

$$\alpha = \frac{-Q\omega}{B} \operatorname{sen}\left(\frac{B\omega}{C-\omega^2}\right) \quad (2.3.35)$$

Una vez determinada la solución particular ya podemos expresar la solución general que queda:

$$S_c(t^*) = \gamma e^{\frac{-Bt^*}{2\omega}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{\omega} t^* + \varphi\right) \right] + \alpha \operatorname{sen}(t^* + \delta) \quad (2.3.36)$$

Siendo B (2.3.13), ω_0 (2.3.20), ω (parámetro), α (2.3.35) y δ (2.3.34) parámetros del problema o funciones de los propios parámetros dados en el final del apartado (2.1) y calculables numéricamente tan sólo queda por determinar γ y φ para cerrar la solución. Aplicando las condiciones iniciales (2.3.9) y (2.3.10) obtenemos dos ecuaciones para las dos incógnitas:

$$\gamma \operatorname{sen}(\varphi) + \alpha \operatorname{sen}(\delta) = 0 \quad (2.3.37)$$

$$\gamma \left[\frac{-B}{2\omega} \operatorname{sen}(\varphi) + \frac{\omega_0}{\omega} \cos(\varphi) \right] + \alpha \cos(\delta) = 0 \quad (2.3.38)$$

Despejando tenemos:

$$\varphi = \cot^{-1} \left(\frac{\frac{\omega_0}{\omega} \left(\frac{B}{2\omega} \operatorname{sen}(\delta) + \cos(\delta) \right)}{\operatorname{sen}(\delta)} \right) \quad (2.3.39)$$

$$\gamma = \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\delta)}{\operatorname{sen}(\varphi)} \quad (2.3.40)$$

- Conclusiones y comentarios

Representando la evolución temporal del radio adimensional $1+X$ (perturbación) dada por la solución completa (2.3.36) obtenemos los siguientes resultados:

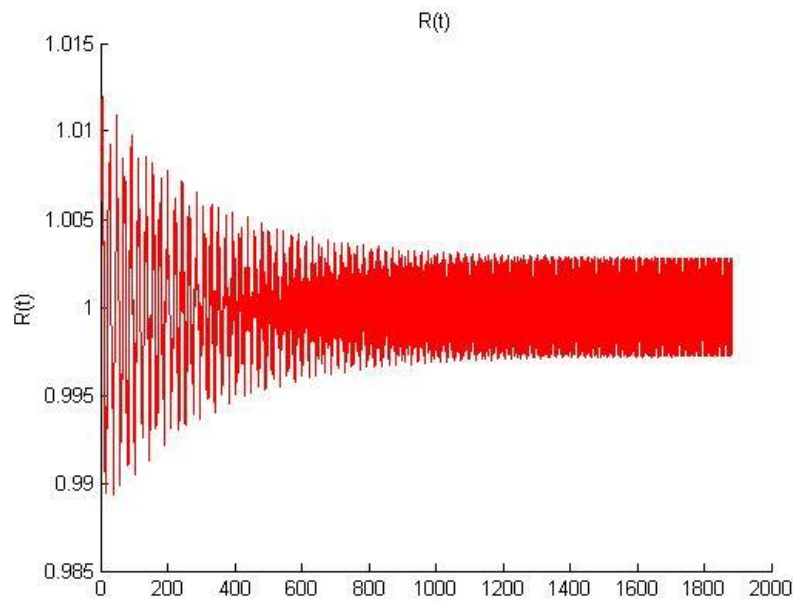


Figura 5. Evolución temporal del radio de la pared de la burbuja de la solución linealizada

Superponiendo la gráfica con la simulación numérica y la analítica del problema linealizado obtenemos:

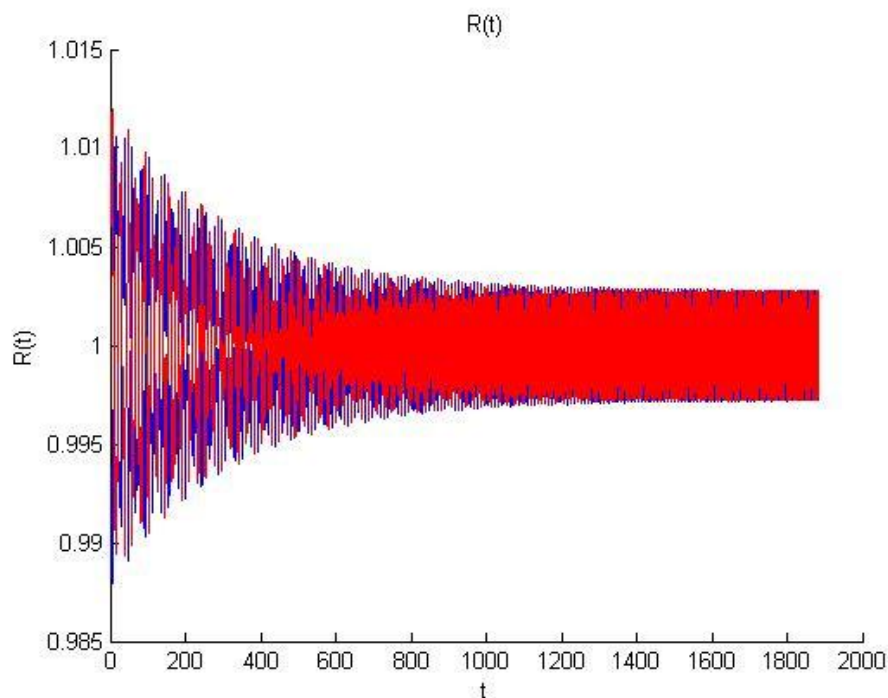


Figura 6. Superposición de soluciones

Como podemos ver en la gráfica superpuesta la aproximación lineal de la ecuación completa refleja bastante bien la realidad y el comportamiento de la burbuja, en el régimen de frecuencia ω y amplitud P_A que estamos tratando. A la vista de las gráficas la hipótesis de régimen lineal y pequeñas perturbaciones es bastante correcto y es por ello que en lo sucesivo y para simplificar los cálculos nuestros procedimientos se basaran en la respuesta lineal.

3. Campo de presiones radiado por una burbuja

3.1 Descripción del problema, ecuaciones y fundamentos

Prosiguiendo con el problema del apartado 2 tengamos la misma burbuja que la de la figura 1. Las oscilaciones de la burbuja provocadas por la onda de presión incidente a su vez producen ondas acústicas que se propagan en el agua. Estas ondas acústicas asumamos que pueden ser del mismo orden de magnitud que la de la onda incidente.

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes (2.1.1) y (2.1.2) la aproximación acústica simplifica las ecuaciones a la siguiente forma en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.1.2)$$

En la hipótesis acústica en primer lugar supondremos que la velocidad de la pared de la burbuja $\dot{R} \ll c$ (*velocidad del sonido*) y existe cierta compresibilidad del agua. Por otro lado bajo esta hipótesis el orden de magnitud de los términos convectivos es mucho menor que el de los otros términos y por eso se desprecian. Por último hemos tenido en cuenta que la simetría esférica del problema se mantiene. Bajo todas estas hipótesis tenemos las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2).

Podemos relacionar la densidad y la presión del líquido a través de la velocidad del sonido como:

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{S=cte} \quad (3.1.3)$$

Suponemos que los cambios de presión y densidad son tan rápidos que el proceso es isentrópico. Introduciendo (3.1.3) en (3.1.2) obtenemos:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (3.1.4)$$

(3.1.4) junto con (3.1.1) forman un sistema de ecuaciones diferenciales para v_r y ρ . Si tomamos $\frac{\partial}{\partial r}$ en (3.1.1) y $\frac{\partial}{\partial t}$ en (3.1.4) obtenemos una ecuación diferencial para el campo de velocidades de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial v_r}{\partial t} \quad (3.1.5)$$

Una vez obtenido el campo de velocidades de (3.1.5) e introduciéndolo en (3.1.2) llegamos a la siguiente expresión (que podemos ver en el paper de Andrea Prosperetti llamado *“Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids”* de 1976):

$$P_{rad} = -\rho \frac{\partial \chi(r,t)}{\partial t} \quad (3.1.6)$$

$$\chi(r,t) = -\dot{R}R_0^2 r^{-1} \left(1 + \hat{j} \frac{\omega R_0}{c} \right)^{-1} \cdot e^{\left(-\hat{j} \omega \frac{(r-R_0)}{c} \right)} \quad (3.1.7)$$

Desarrollando las anteriores expresiones tenemos finalmente que la presión radiada por la burbuja es:

$$P_{rad}(r,t) = \rho \ddot{R}R_0^2 r^{-1} \left(1 + \hat{j} \frac{\omega R_0}{c} \right)^{-1} \cdot e^{\left(-\hat{j} \omega \frac{(r-R_0)}{c} \right)} \quad (3.1.8)$$

Nótese que la dependencia temporal de la presión radiada la introduce la segunda derivada de $R(t)$ de la pared de la burbuja. Los parámetros dimensionan de manera correcta la presión y los términos complejos introducen desfases en la oscilación de la presión en relación con la onda incidente.

Con todo lo anterior podemos expresar el campo de presiones total alrededor de la burbuja de la forma:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{ext} &= P_0 + P_{onda}(x, t) + P_{rad}(r, t) \\ &= P_0 + P_A e^{j(\omega t - kx)} + \rho \ddot{R} R_0^2 r^{-1} \left(1 + j \frac{\omega R_0}{c}\right)^{-1} \cdot e^{j\omega \left(\frac{r - R_0}{c}\right)}\end{aligned}\quad (3.1.9)$$

Se pueden observar tres contribuciones a la presión total exterior a la burbuja. En primer lugar la presión estática P_0 , en segundo la de una onda $jP_A e^{j(\omega t - kx)}$ incidente a la burbuja, que se desplaza de izquierda a derecha en dirección x , y finalmente la contribución de la presión radiada.

El énfasis en la \hat{P}_{ext} denota que se trata de un número complejo y para su representación tomaremos la parte compleja de la solución ya que en un principio establecimos que $P(t)$ era una onda senoidal que corresponde con la parte compleja de $P_A e^{j(\omega t - kx)}$.

3.2 Resolución

En primer lugar para poder representar el problema y no tener problemas con MatLab procederemos a adimensionalizar el problema.

Partimos de la ecuación (3.1.9) e introducimos los siguientes grupos adimensionales:

$$r^* = \frac{r}{R_0} \quad (3.2.1)$$

$$t^* = \omega t \quad (3.2.2)$$

$$x^* = \frac{x}{R_0} \quad (3.2.3)$$

$$\ddot{R}^* = \frac{\ddot{R}}{R_0} \quad (3.2.4)$$

$$\ddot{R} = \omega^2 R_0 \ddot{R}^* \quad (3.2.5)$$

$$q = \frac{P_A}{\rho R_0^2 \omega^2} \quad (3.2.6)$$

$$k^* = \frac{\omega R_0}{c} \quad (3.2.7)$$

$$\hat{P}_{ext}^* = \frac{\hat{P}_{ext} - P_0}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad (3.2.8)$$

De esta forma la presión exterior adimensionalizada queda:

$$\hat{P}_{ext} = q e^{j(t^* - k^* x^*)} + \frac{\ddot{R}^*}{r^*} (1 + j k^*)^{-1} \cdot e^{(-j k^* (r^* - 1))} \quad (3.2.9)$$

Únicamente queda por determinar \ddot{R}^* para cerrar el problema. Para ello recurrimos a la expresión (2.3.30) que recuerdo a continuación:

$$\ddot{X} + \frac{B}{\omega} \dot{X} + \frac{C}{\omega^2} X = -q \sin(t^*) \quad (2.3.30)$$

Empleando notación compleja:

$$\ddot{X} + \frac{B}{\omega} \dot{X} + \frac{C}{\omega^2} X = -q e^{j t^*} \quad (3.2.10)$$

Buscamos soluciones del tipo $X = \mathcal{X}(\omega) e^{j t^*}$ y sustituyendo en (3.2.10) tenemos:

$$-\mathcal{X} + j \frac{B}{\omega} \mathcal{X} + \frac{C}{\omega^2} \mathcal{X} = -q \quad (3.2.11)$$

Llamamos $\mathcal{X}(\omega)$ a las amplitudes complejas de las oscilaciones de las burbujas. Es un término que facilita los cálculos y las interpretaciones y que a la postre será la herramienta para poder resolver un problema mucho mas complejo. Podemos expresar el radio $R(t)$ en función de estas amplitudes de la

siguiente forma:

$$R^* = 1 + \mathcal{X}(\omega)e^{\hat{j}t^*} \quad (3.2.12)$$

$$\dot{R}^* = \hat{j}\mathcal{X}(\omega)e^{\hat{j}t^*} \quad (3.2.13)$$

$$\ddot{R}^* = -\mathcal{X}(\omega)e^{\hat{j}t^*} \quad (3.2.14)$$

Despejando de la expresión (3.2.11) tenemos:

$$\mathcal{X} = \frac{-q}{-1 + \hat{j}\frac{B}{\omega} + \frac{C}{\omega^2}} \quad (3.2.15)$$

Finalmente utilizando (3.2.14) y (3.2.15) e introduciéndolo en (3.2.9) podemos expresar la presión exterior adimensional:

$$\hat{P}_{ext} = e^{\hat{j}t^*} \left\{ q e^{(-\hat{j}(k^*x^*))} - \frac{x}{r^*} (1 + \hat{j}k^*)^{-1} \cdot e^{(-\hat{j}k^*(r^*-1))} \right\} \quad (3.2.16)$$

Finalmente con (3.2.16) cogiendo la parte real de la presión adimensional compleja podemos pintar el campo de presiones. Se puede ver en la expresión la contribución de los términos de la onda de sonido y la presión radiada por la burbuja.

Para entender mejor el comportamiento de las burbujas y los gradientes de presión generados vamos a representar las dos contribuciones por separado a diferentes tiempos y al final la

contribución total.

En cualquiera de los dos casos hemos optado por pintar un dominio adimensional de 20 veces el radio con una malla en forma circular. Hay que tener un compromiso entre la fidelidad de los resultados que viene dado por la precisión y número de nodos de la malla así como del tiempo de computación que también se ve incrementado si aumentamos el número de nodos.

- Presión de la onda incidente

En primer lugar vamos a representar la onda incidente a la burbuja. Como establecimos al principio se trata de una onda senoidal que se desplaza de izquierda a derecha.

$$\hat{P}_{onda} = qe^{(j(t^* - k^*x^*))} \quad (3.2.16)$$

Representando la parte compleja en MatLab de (3.2.16) obtenemos en diferentes intervalos de tiempo los siguientes resultados:

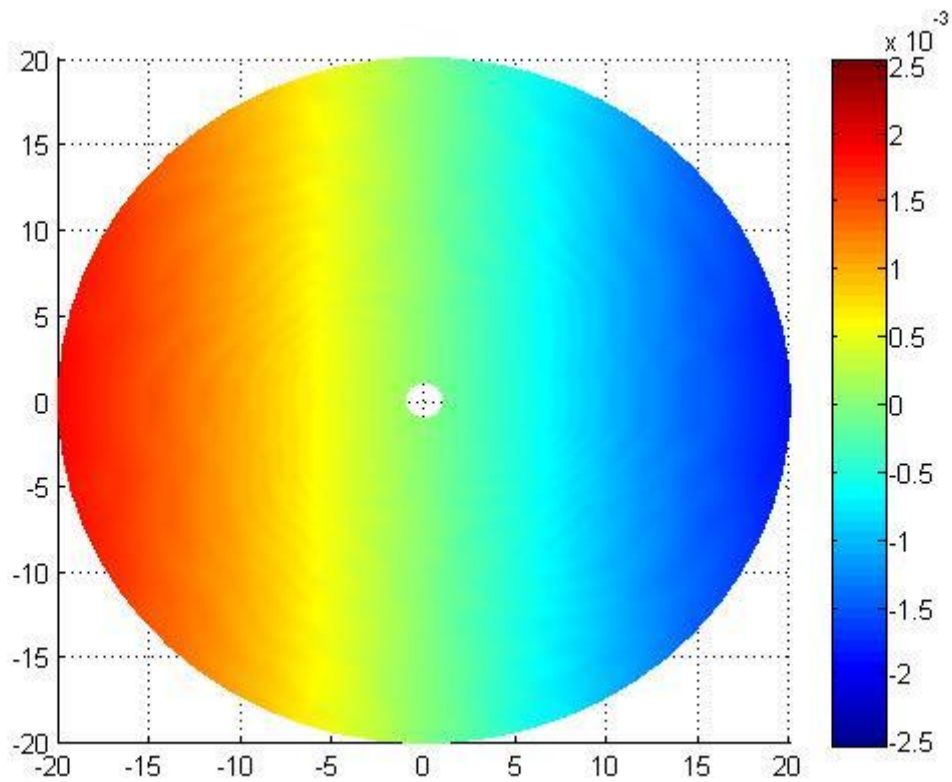


Figura 7. Onda acústica en $t=0$

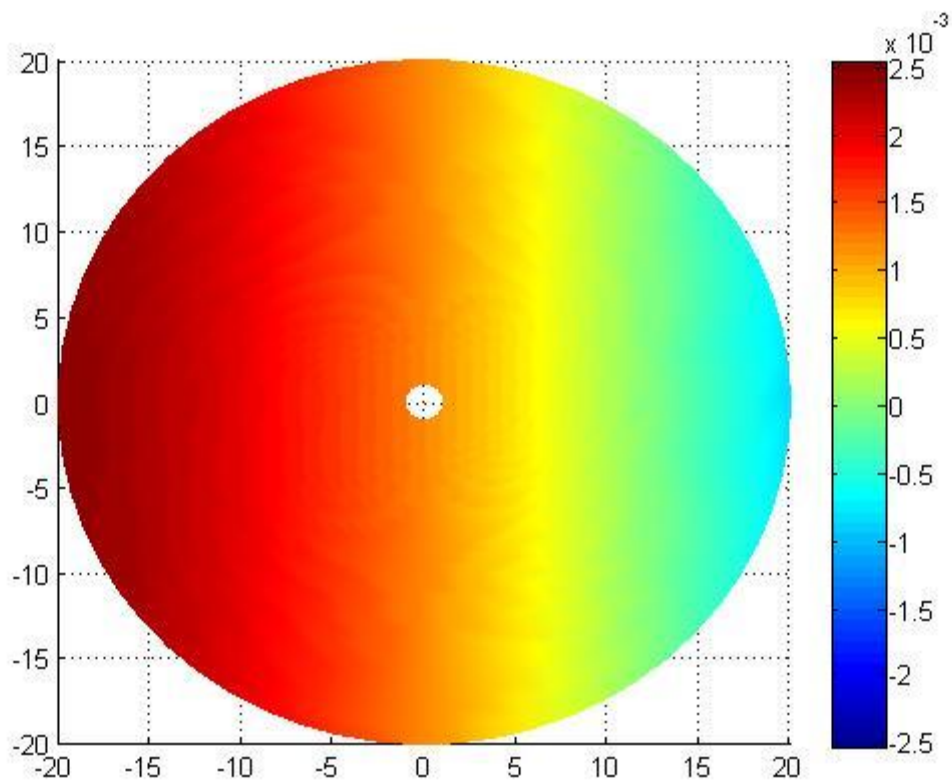


Figura 8. Onda acústica en $t=0,49$

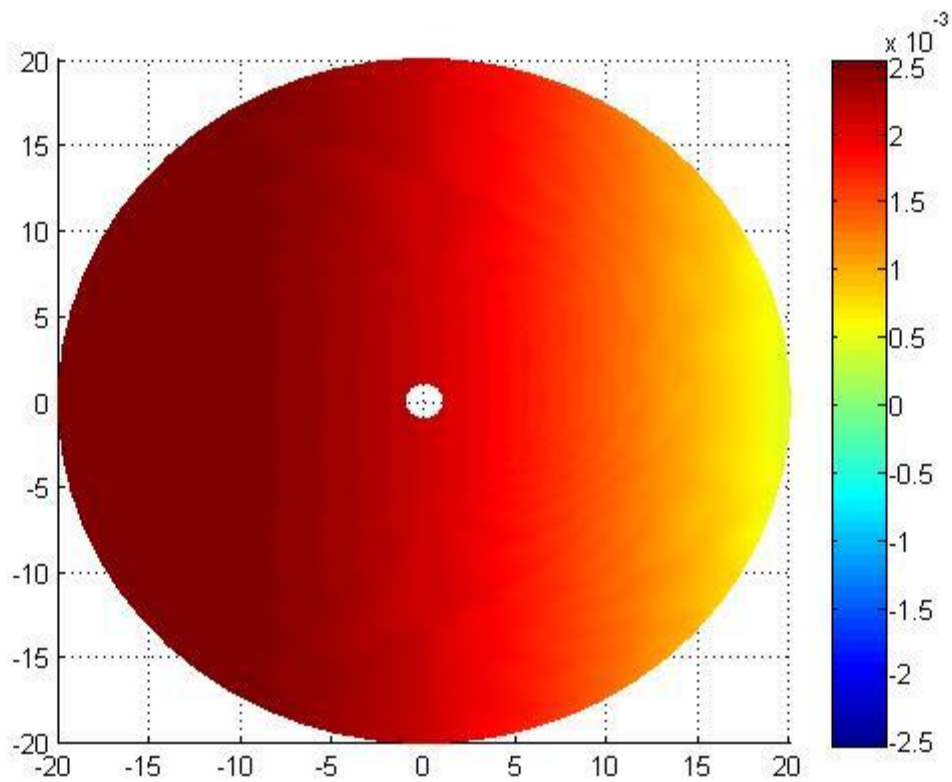


Figura 9. Onda acústica en $t=0,99$

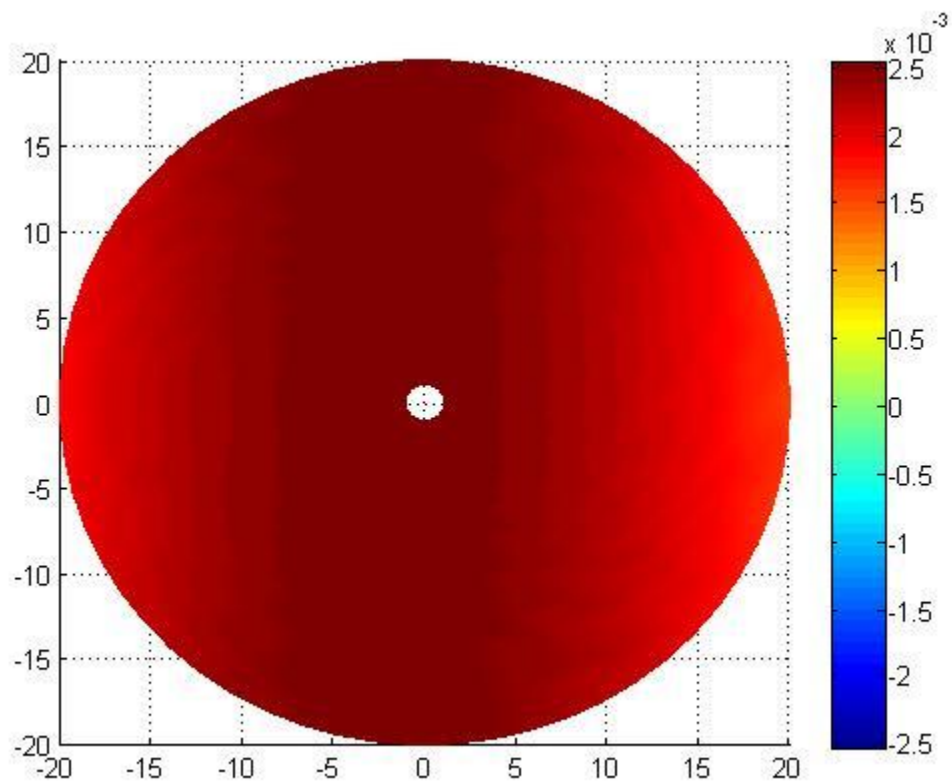


Figura 10. Onda acústica en $t=1,49$

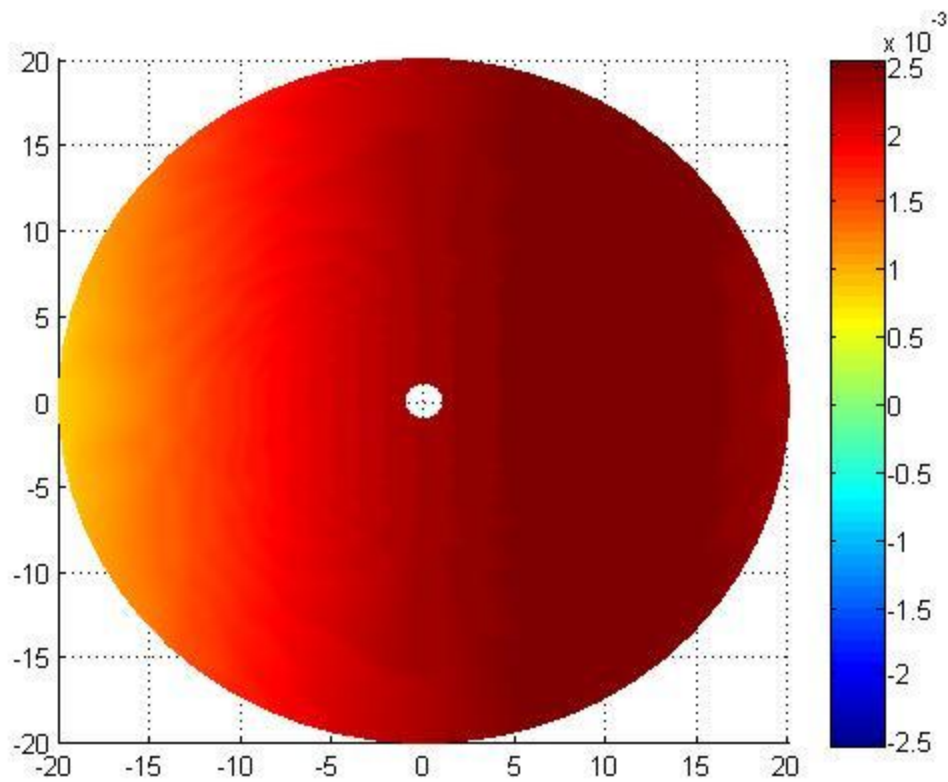


Figura 11. Onda acústica en $t=1.99$

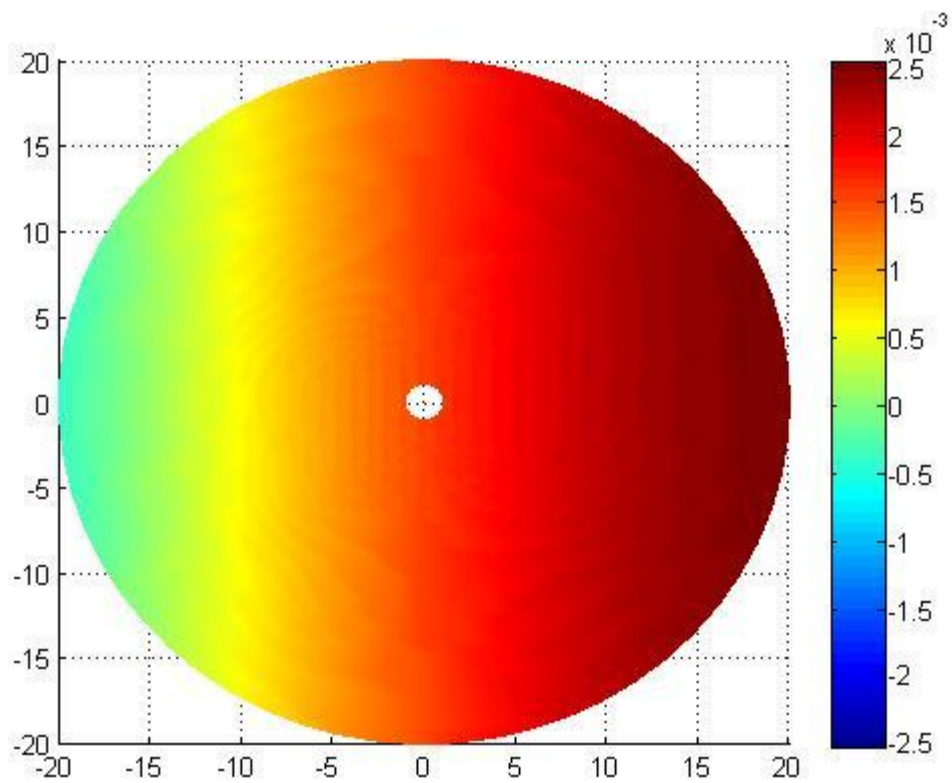


Figura 11. Onda acústica en $t=2.49$

Viendo la evolución temporal de la onda podemos decir que se trata de una onda de presión que su perturbación es 0 en el origen en centro de la burbuja a $t=0$. Esto es como la definimos a principio del problema. La hemos representado en prácticamente la totalidad del ciclo y vemos como su perturbación se desplaza de izquierda derecha enfrentándose en primer lugar a la burbuja en su zona de máxima amplitud positiva.

- Presión radiada

La contribución de la burbuja al campo total de presiones como hemos visto anteriormente es igual a:

$$\hat{P}_{rad} = e^{j\hat{t}^*} \left\{ -\frac{x}{r^*} (1 + jk^*)^{-1} \cdot e^{(-jk^*(r^*-1))} \right\} \quad (3.2.17)$$

Optando por una representación tridimensional en MatLab obtenemos la siguiente evolución temporal de la presión radiada:

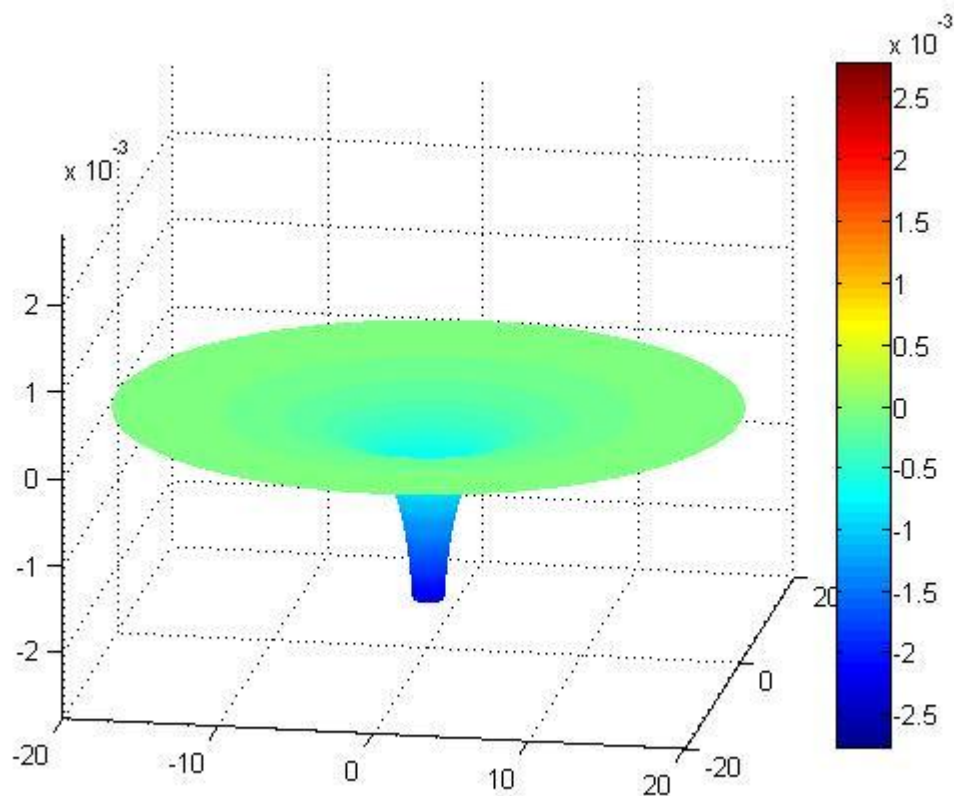


Figura 12. Presión radiada en $t=0$

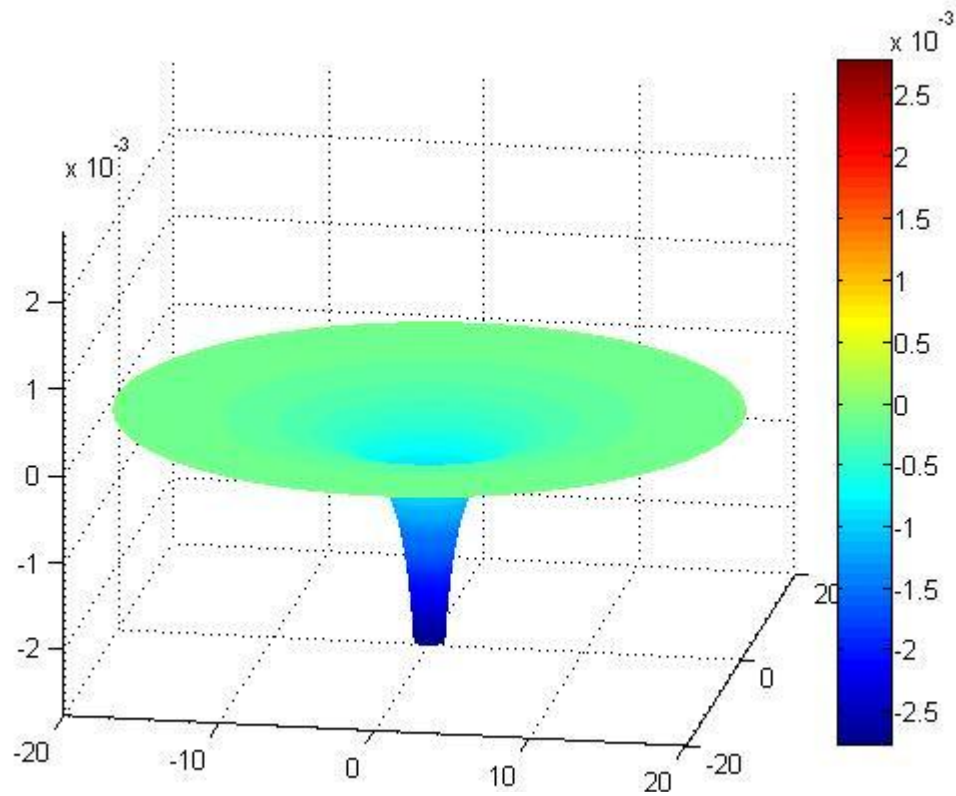


Figura 13. Presión radiada en $t=0,49$

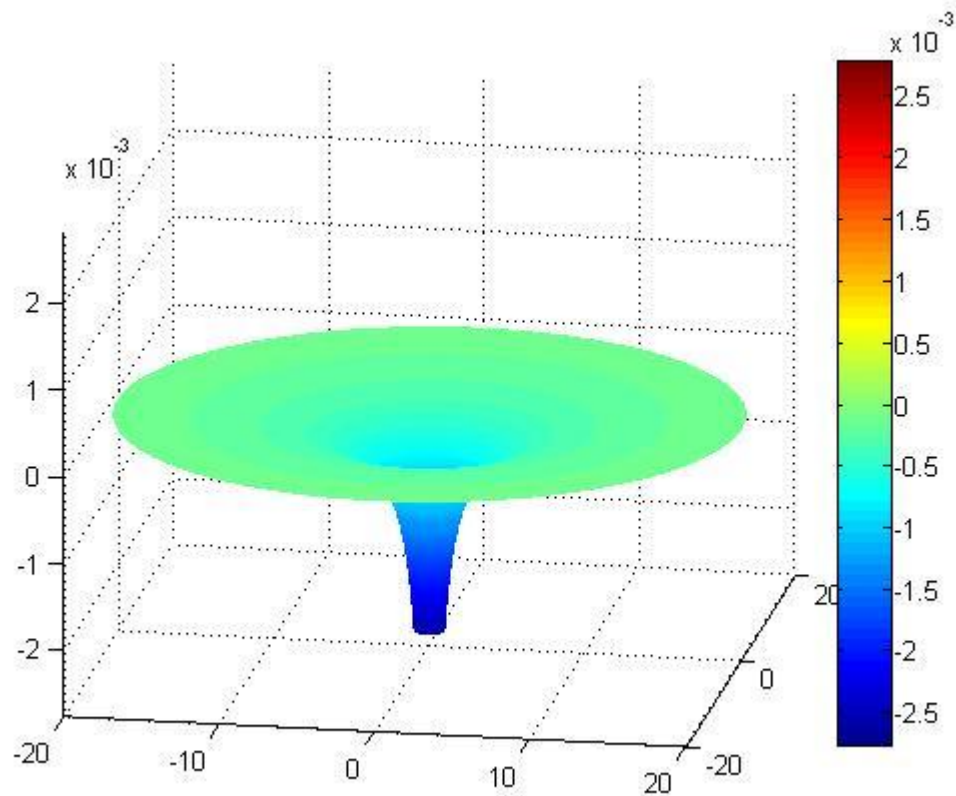


Figura 14. Presión radiada en $t=0,99$

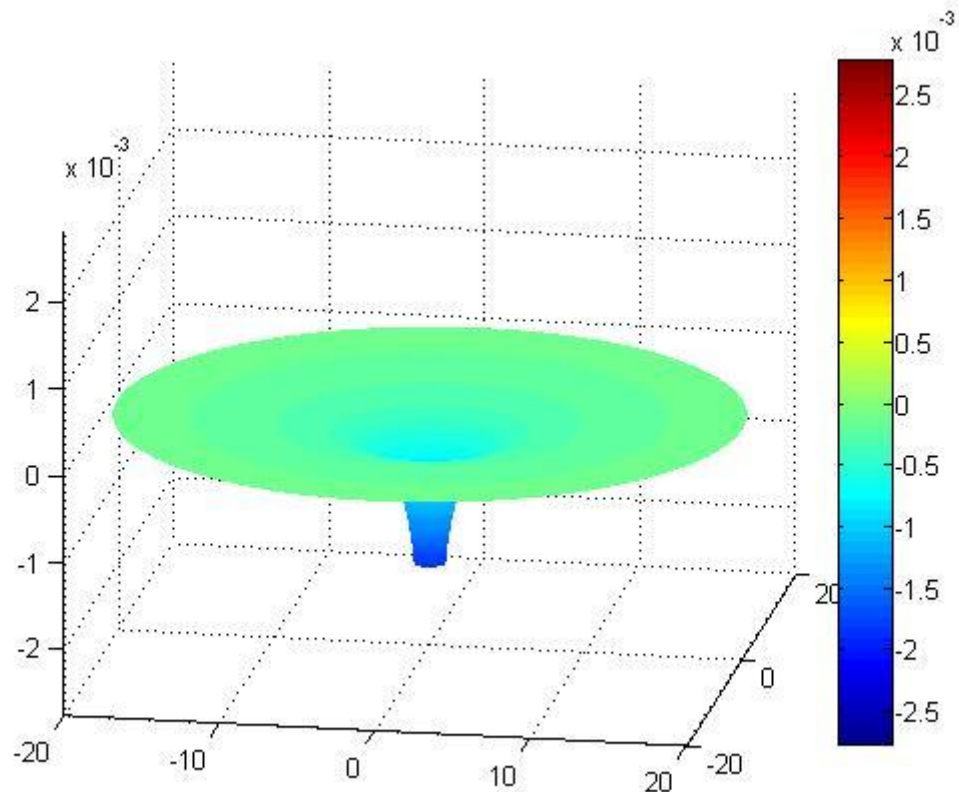


Figura 15. Presión radiada en $t=1,49$

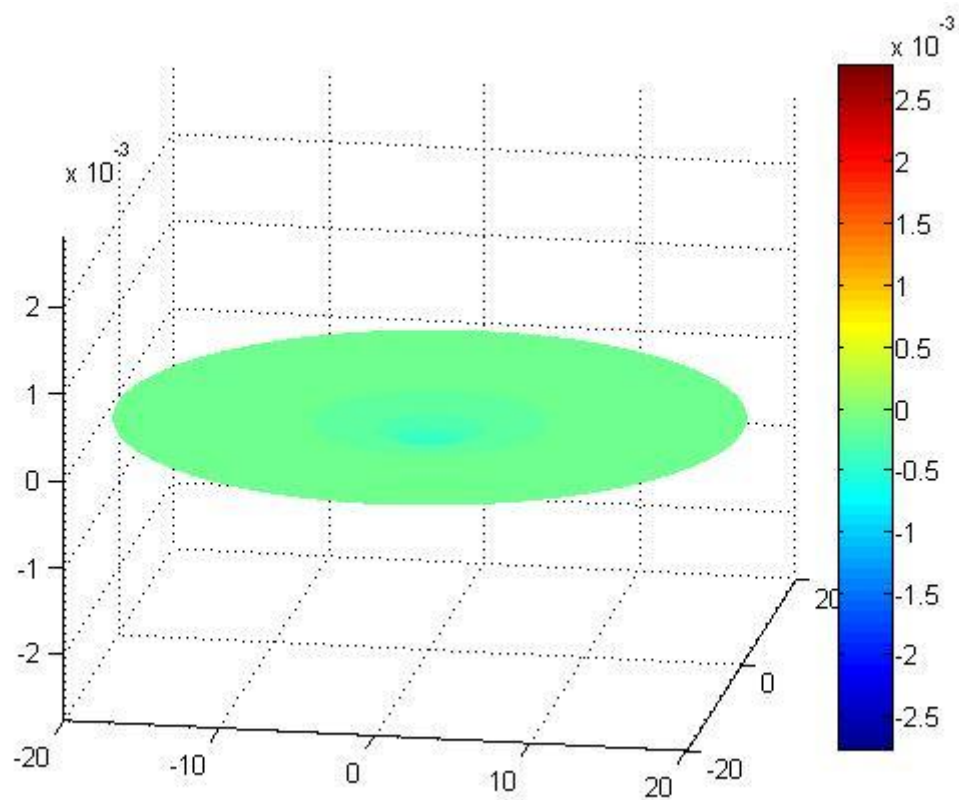


Figura 16. Presión radiada en $t=1,99$

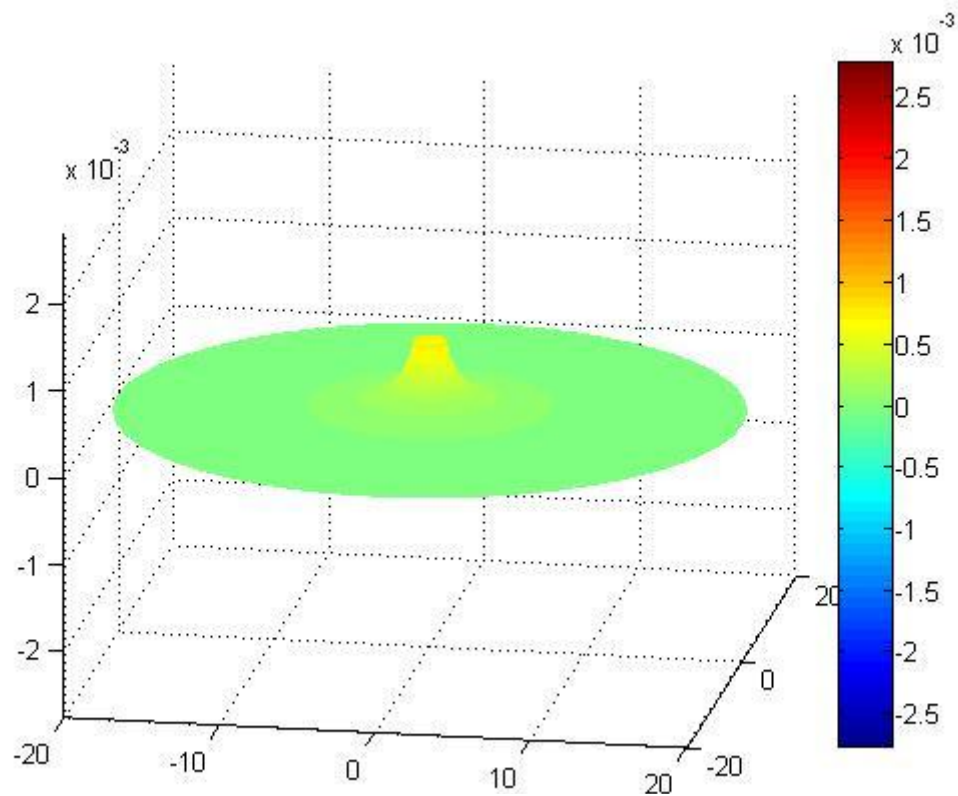


Figura 17. Presión radiada en $t=2.49$

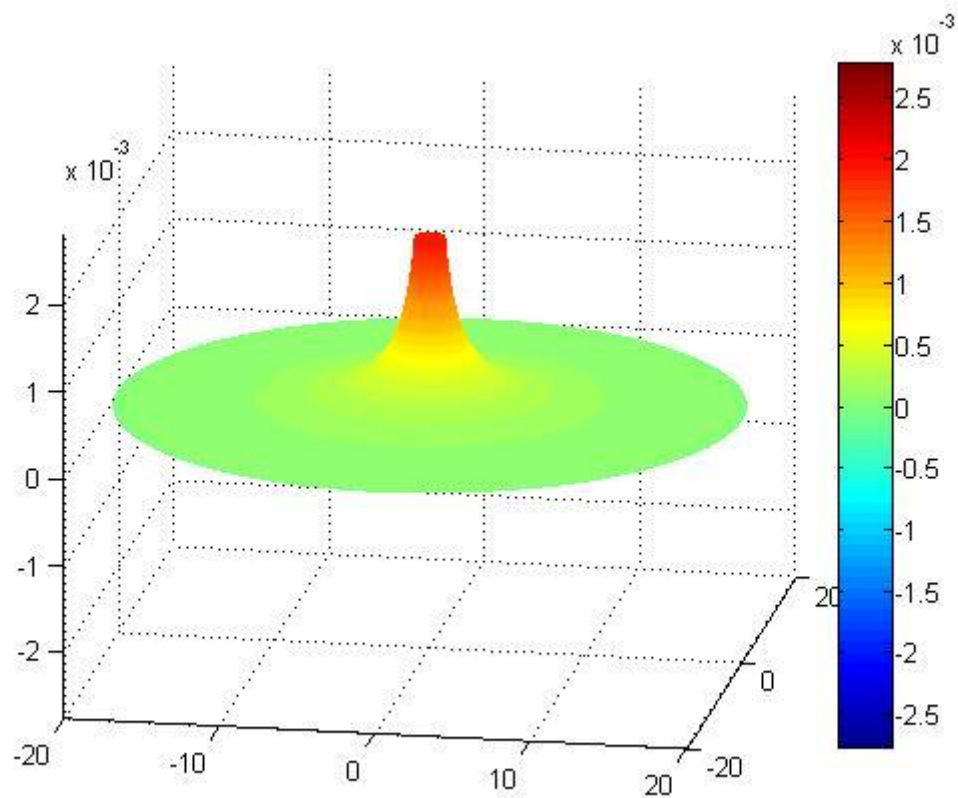


Figura 18. Presión radiada en $t=2.99$

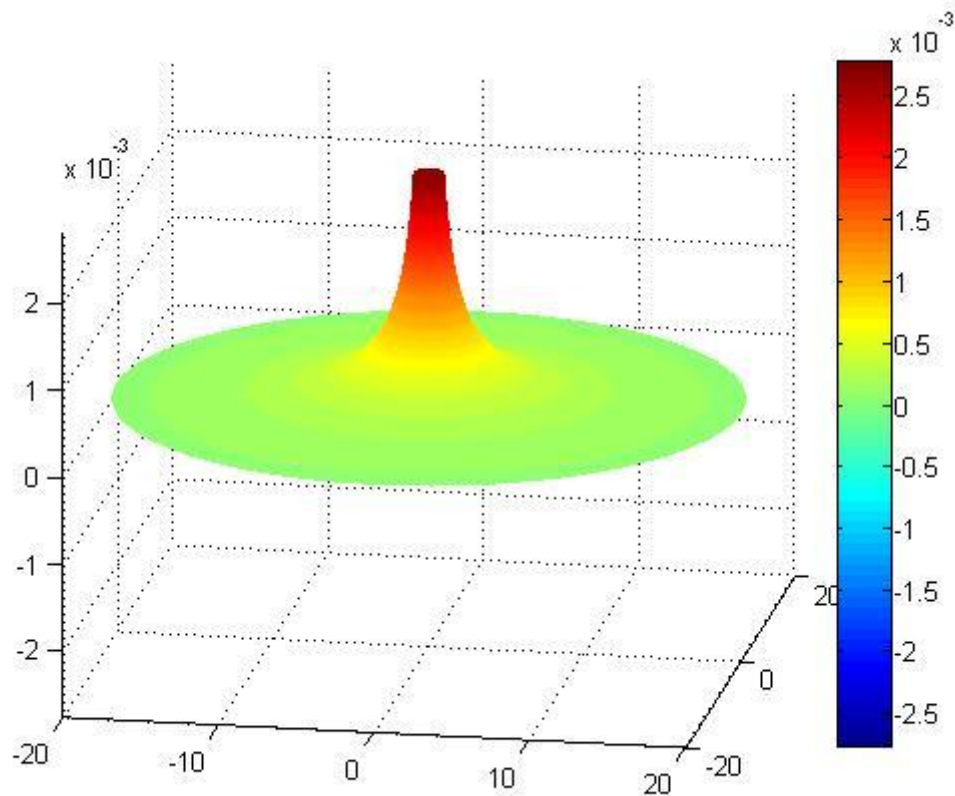


Figura 19. Presión radiada en $t=3,49$

Se puede observar como la solución presenta simetría. La propia expresión (3.2.17) establece la única dependencia con el tiempo y con el radio adimensional.

- Campo de presiones total

Para representar el campo total de presiones cogemos la parte real de la presión total compleja que recordamos a continuación:

$$\hat{P}_{ext} = e^{\hat{j}t^*} \left\{ q e^{(-\hat{j}(k^*x^*))} - \frac{x}{r^*} (1 + \hat{j}k^*)^{-1} \cdot e^{(-\hat{j}k^*(r^*-1))} \right\} \quad (3.2.16)$$

Vamos a representar la vista tridimensional y al final 3 figuras en plano cenital.

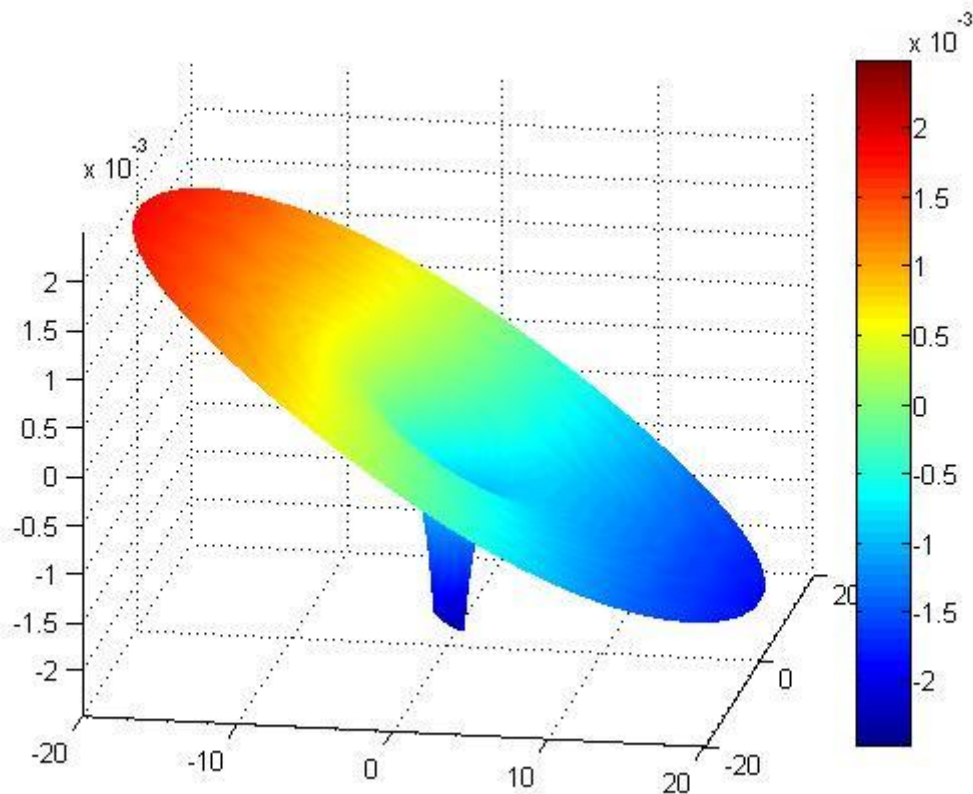


Figura 19. Presión total t=0

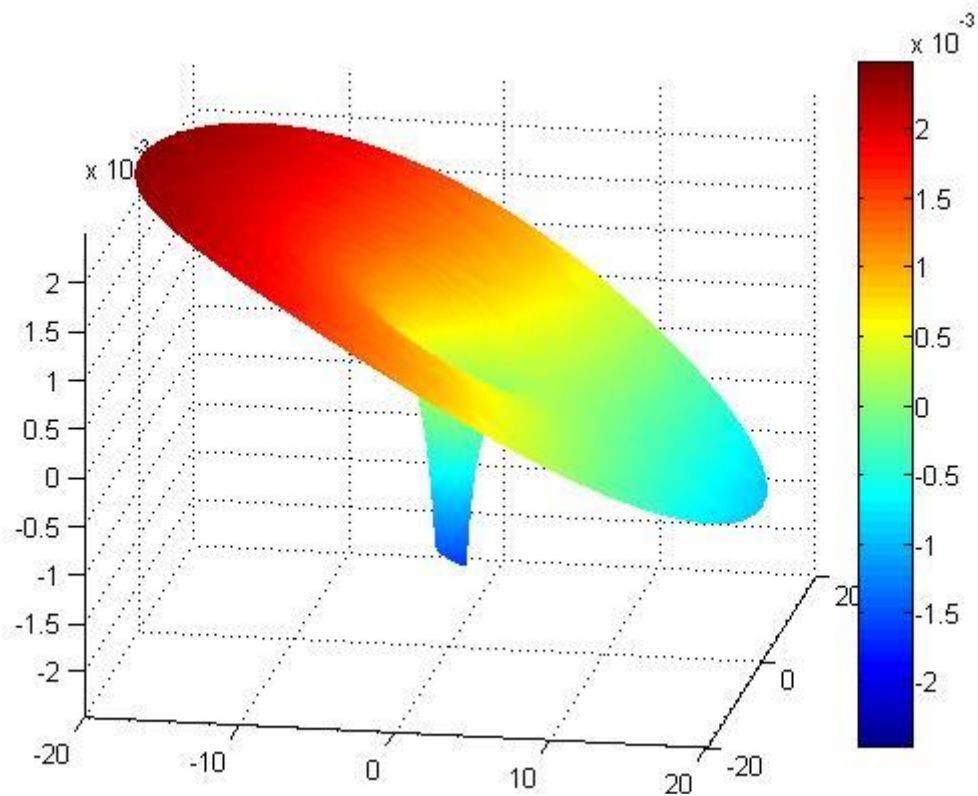


Figura 20. Presión total en $t=0,49$

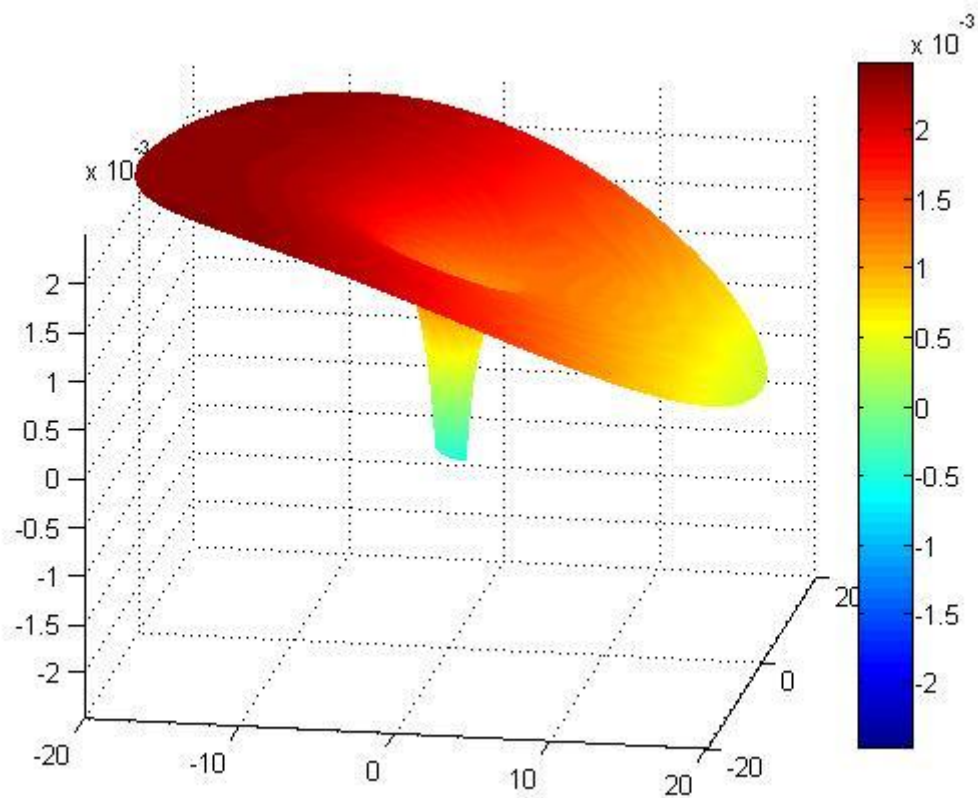


Figura 21. Presión total en $t=0,99$

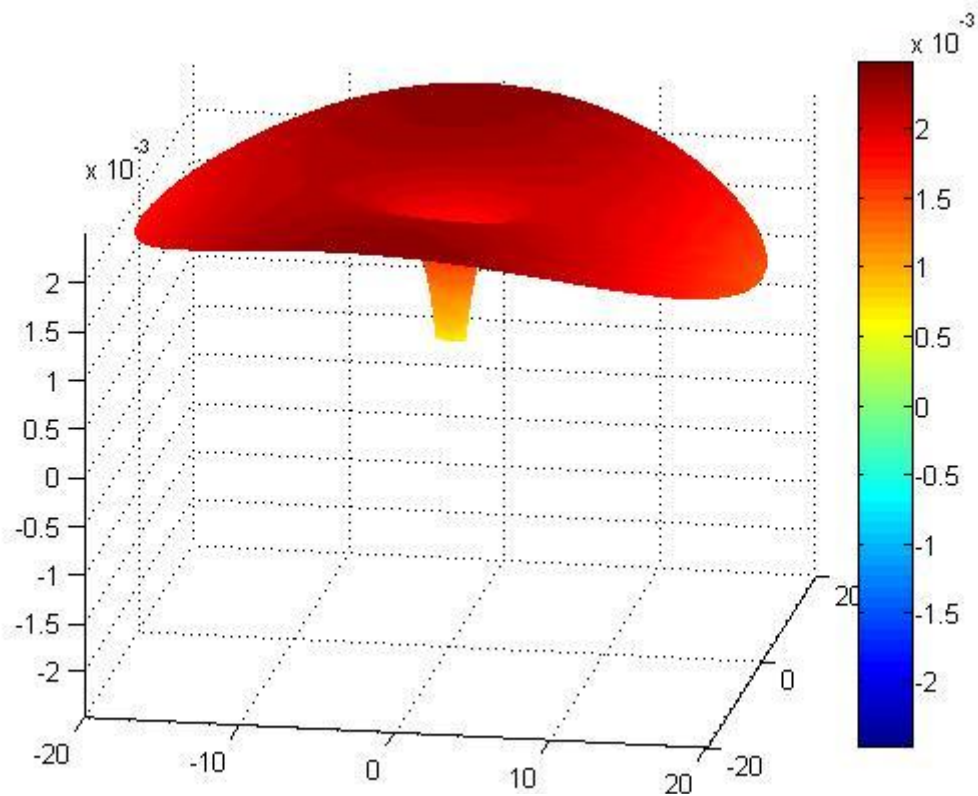


Figura 22. Presión total en $t=1,49$

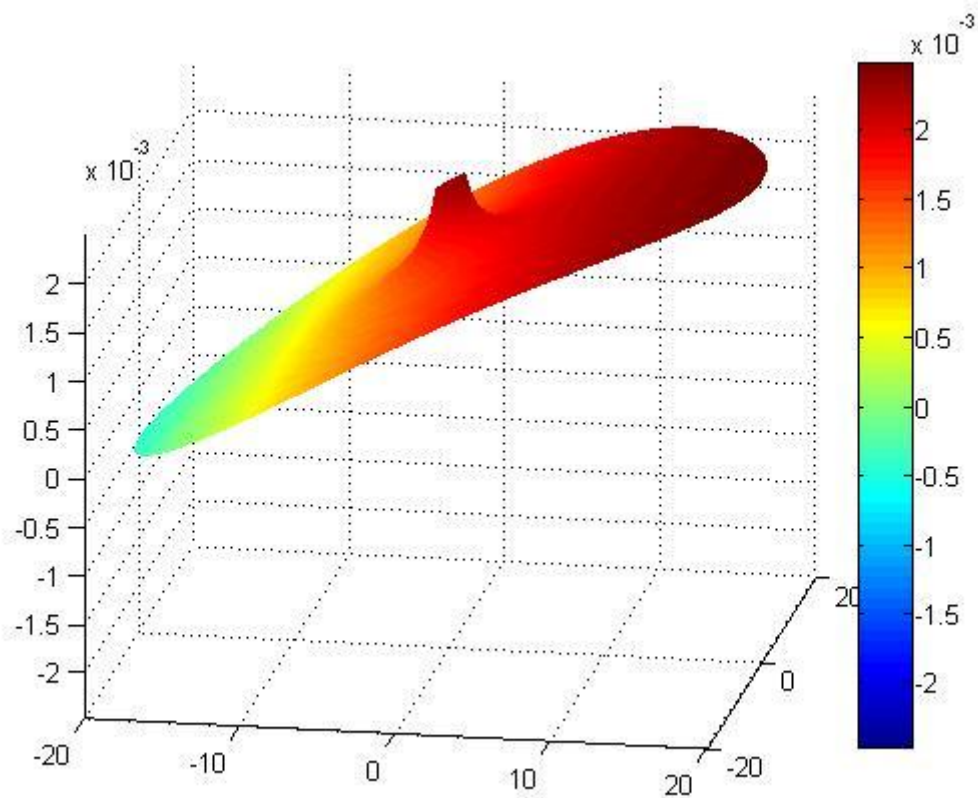


Figura 23. Presión total en $t=2,49$

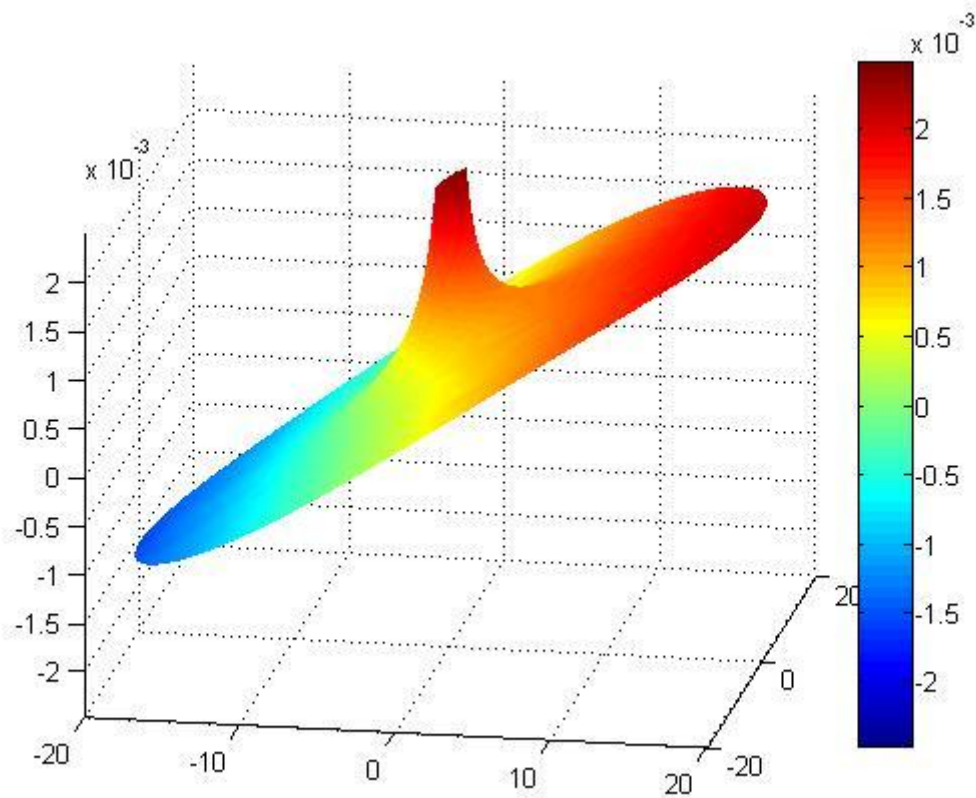


Figura 24. Presión total en $t=2.99$

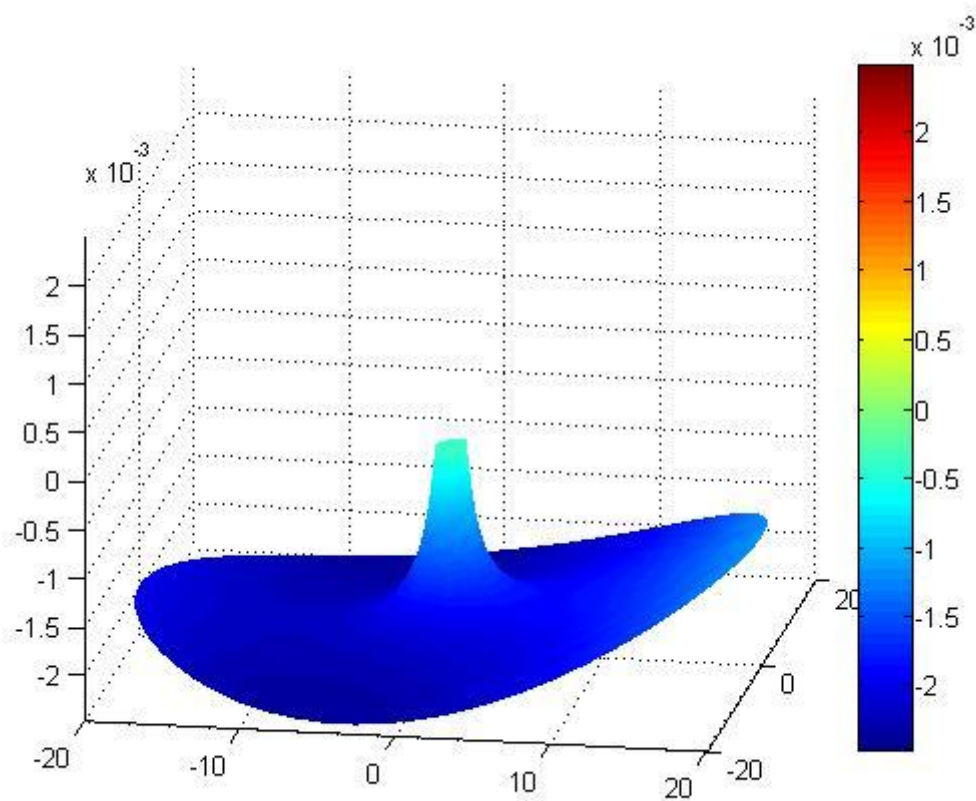


Figura 25. Presión total en $t=4.49$

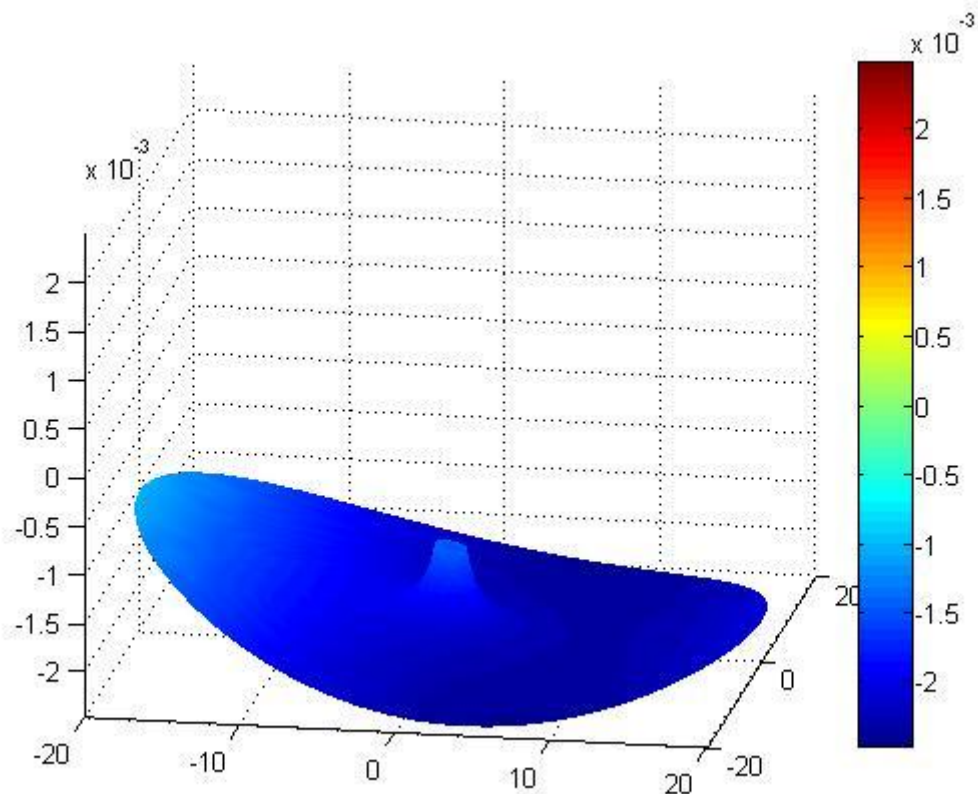


Figura 26. Presión total en 3,49

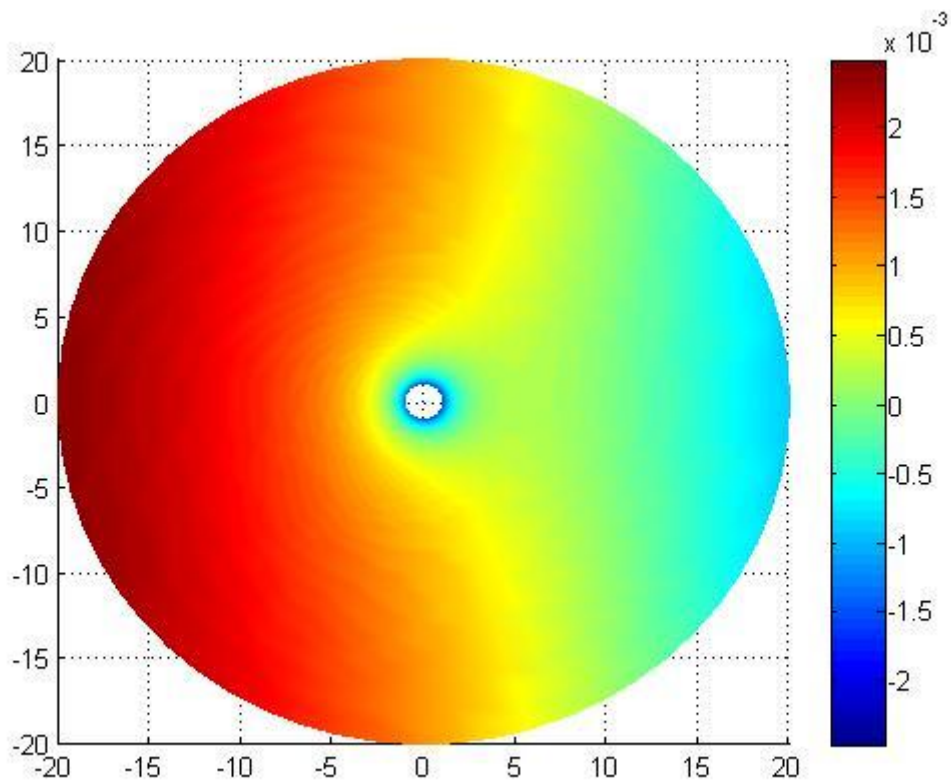


Figura 27. Presión total $t=0,49$

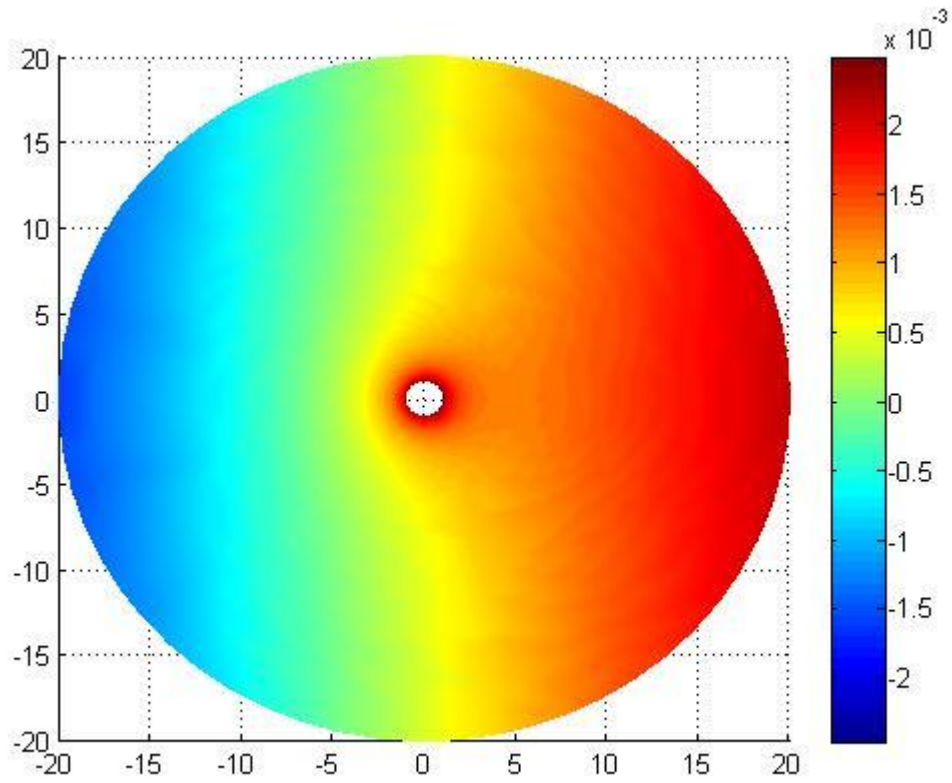


Figura 28. Presión total $t=2,49$

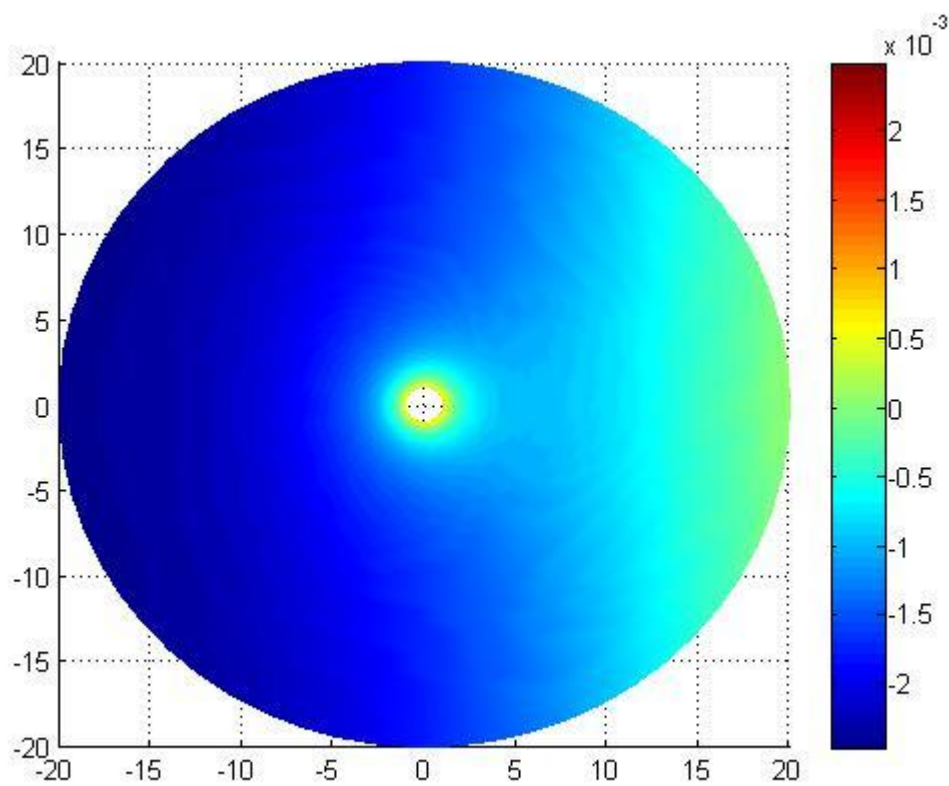


Figura 29. Presión total $t=3,99$

3.3 Resultados numéricos, comentarios y conclusiones

En primer lugar vamos a facilitar a título informativo resultados numéricos de los parámetros más importantes del problema. Las propiedades de los fluidos se pueden ver al final del apartado 2.1 las recordamos a continuación:

$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\sigma = 0.072 \frac{N}{m}$$

$$\gamma = 1 \text{ (aproximación a proceso isoterma)}$$

$$\eta = 0.001 \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$c \text{ (velocidad del sonido)} = 1540 \frac{m}{s}$$

$$R_0 = 10 \mu m$$

$$P_0 = 101325 Pa$$

$$P_v = 0 Pa$$

$$P(t) = 10^4 \sin(\omega t) Pa$$

$$\omega \text{ (frecuencia de insonación)} = 2\pi \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$$

Vamos a empezar con los parámetros B , C , Q , k^* y ω_0 de la expresión de la ecuación linealizada (2.3.12) y que se pueden ver en otras expresiones. Recordamos los parámetros a continuación:

$$B = \frac{4\eta}{\rho R_0^2} \quad (2.3.13)$$

$$C = \frac{\left[\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) 3\gamma - \frac{2\sigma}{R_0} \right]}{\rho R_0^2} \quad (2.3.14)$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2} = \sqrt{\left| \frac{4\eta^2}{\rho^2 R_0^4} - \frac{\left[\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - P_v \right) 3\gamma - \frac{2\sigma}{R_0} \right]}{\rho R_0^2} \right|} \quad (2.3.20)$$

$$q = \frac{P_A}{\rho R_0^2 \omega^2} \quad (2.3.31)$$

$$k^* = \frac{\omega R_0}{c} \quad (3.2.7)$$

A continuación el valor numérico:

$$\begin{aligned} B &= 4 \times 10^4 \text{ s}^{-1} \\ C &= 3,3277 \times 10^{12} \text{ s}^{-2} \\ \omega_0 &= 1,8241 \times 10^6 \text{ s}^{-1} \\ q &= 0,0025 \\ k^* &= 0.0408 \end{aligned}$$

También podemos obtener los valores máximos de las amplitudes de las diferentes presiones

$$\begin{aligned} |P_{onda}|_{\text{máx}} &= 0,00253 \\ |P_{rad}|_{\text{máx}} &= 0,00276 \\ |P_{total}|_{\text{máx}} &= 0,00247 \end{aligned}$$

Esto denota que la presión total no es la suma en amplitudes de la contribución de las presiones de la onda y la radiada por la burbuja. Esto es así por la existencia de desfases entre las dos ondas de presión, la emitida por la burbuja y la incidente. Estos desfases provocan interferencias acústicas destructivas y constructivas en cada instante de tiempo.

Nótese que estos desfases dependen de dos fuentes fundamentales. En primer lugar de la propia solución de la presión radiada que se obtiene al resolver las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2) y que conducen a la expresión (3.2.17) que como dijimos tiene términos complejos al margen de la exponencial temporal y de la amplitud compleja \mathcal{X} que introducen desfases. El segundo es la propia amplitud compleja \mathcal{X} que proviene de la segunda derivada del radio de la burbuja $R(t)$ y que también introduce desfases propios de la oscilación de la burbuja. Todo esto se ve influenciado claramente por la frecuencia de oscilación ω y a determinados rangos de excitación los desfases pueden cambiar.

4. Campo de presiones radiado por una nube de n burbujas

4.1 Descripción del problema, ecuaciones y fundamentos

Tengamos ahora una nube de burbujas en el espacio. En principio no existe restricción de su posición y se permite la interacción de unas con otras.

Como ya hemos visto en el apartado 3.1 la ecuación para las amplitudes complejas de cada burbuja i la podemos escribir de la siguiente manera:

$$-\omega^2 \mathcal{X}_i + \hat{J} B_i \omega \mathcal{X}_i + C_i \mathcal{X}_i = -\frac{P_i}{\rho R_{0i}^2} \quad (4.1.1)$$

El problema ahora radica en que al haber más de una burbuja los campos de presiones radiados se solapan unos con otros e interactúan. Es decir cada burbuja siente la presión de las burbujas de su alrededor y viceversa. Dicho con otras palabras hay un acople entre las ecuaciones de las amplitudes ya que las presiones de cada ecuación P_i introducen términos de otras burbujas. Por otro lado los coeficientes B y C dependen del radio de la burbuja y por lo tanto son propios de cada una de ellas como se puede ver en la expresión (2.3.13) y (2.3.14).

De esta forma la presión que siente cada burbuja será la de la onda incidente con un cierto desfase que depende de su posición relativa y la presión radiada de las demás burbujas a la distancia relativa entre ellas, esto expresado de forma matemática para n burbujas queda:

$$\hat{P}_i = \sum_j^n \left[-\rho \frac{\omega R_{0j}^2}{r_{i,j}} \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega R_{0j}}{c}} \right) e^{-\left(j \frac{\omega}{c} r_{i,j}\right)} \right] \mathcal{X}_j + P(t^*) e^{(j \frac{\omega}{c} x_i)} \quad (4.1.2)$$

R_{0j} = radio de la burbuja j

$r_{i,j}$ = distancia entre las burbujas i y j

x_i = coordenada x de la burbuja i

$$P(t^*, x^*) = -\hat{J} P_A e^{(j \omega t^*)}$$

Una vez determinadas las amplitudes complejas podemos hallar el campo de presiones total como superposición de todos a través de la siguiente fórmula que vimos en el apartado 3.1

$$\hat{P}^*_{total}(r^*, t^*) = e^{j\omega t^*} \left\{ -q j e^{-jk^* x^*} + \sum_i^n \left[\frac{-\chi_i R_{0j}^3}{r_i^* R_{0j}^{*3}} \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega R_{0i}}{c}} \right) e^{(jk^* r_i^*)} \right] \right\} \quad (4.1.3)$$

$$q = \frac{P_A}{\rho R_{0j}^{*2} \omega^2} \quad (4.1.4)$$

$$\hat{P}^*_{total} = \frac{\hat{P}_{total} - P_0}{\rho R_{0j}^{*2} \omega^2} \quad (4.1.5)$$

Nótese que la expresión (4.1.3) es compleja y para su representación cogeremos la parte imaginaria de la solución. Se compone de dos términos, el primero de ellos es la onda de presión que avanza en la dirección del eje x de izquierda a derecha y el segundo término es la contribución de todas las presiones radiadas por las burbujas.

Por otro lado sigue siendo adimensional pero aquí se presenta un problema con la longitud característica. Puesto que ahora existen n burbujas, a priori cada una puede tener un tamaño diferente. Es por eso que adimensionalizamos el problema, tanto las distancias r^* , los radios de las demás burbujas R_{0j} y el término de la presión con un radio característico R_{0j}^* arbitrario y que en nuestro caso será en que tomamos para la simulación de una sola burbuja y de un valor de 10 micras. Para el tiempo la adimensionalización es con la frecuencia de insonación ω como en todo el problema.

4.2 Resolución: Cálculo de las amplitudes complejas

Partimos de las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) que recordamos a continuación:

$$-\omega^2 \mathcal{X}_i + \hat{j} B_i \omega \mathcal{X}_i + C_i \mathcal{X}_i = -\frac{P_i}{\rho R_{0i}^2} \quad (4.1.1)$$

$$P_i = \sum_j^n \left[-\rho \frac{\omega^2 R_{0j}^2}{r_{i,j}} \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega R_{0j}}{c}} \right) e^{-\left(j \frac{\omega}{c} r_{i,j}\right)} \right] \mathcal{X}_j + P(t^*, x^*) e^{\left(j \frac{\omega}{c} x_i\right)} \quad (4.1.2)$$

Lo primero de todo vamos a calcular las \mathcal{X}_i necesarias para representar el campo de presiones total.

Combinando (4.1.1) y (4.1.2) y particularizando para dos burbujas obtenemos la siguiente expresión:

$$(C_1 - \omega^2 + \hat{j} B_1 \omega) \mathcal{X}_1 - \left[\rho \frac{\omega^2 R_{02}^3}{r_{1,2}} \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega R_{02}}{c}} \right) e^{-\left(j \frac{\omega}{c} r_{1,2}\right)} \right] \mathcal{X}_2 = -\frac{P_A e^{\left(j \frac{\omega}{c} x_1\right)}}{\rho R_{01}^2} \quad (4.2.1)$$

$$-\left[\rho \frac{\omega^2 R_{01}^3}{r_{1,2}} \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega R_{01}}{c}} \right) e^{-\left(j \frac{\omega}{c} r_{1,2}\right)} \right] \mathcal{X}_1 + (C_2 - \omega^2 + \hat{j} B_2 \omega) \mathcal{X}_2 = -\frac{P_A e^{\left(j \frac{\omega}{c} x_2\right)}}{\rho R_{02}^2} \quad (4.2.2)$$

Visto la estructura de las ecuaciones para dos burbujas haremos unas asignaciones para representar un sistema de n burbujas y n ecuaciones de manera matricial.

$$F_i = (C_i - \omega^2 + \hat{j} B_i \omega) \quad (4.2.3)$$

$$H_{i,j} = \left[\rho \frac{\omega^2 R_{0j}^3}{r_{i,j}} \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega R_{0j}}{c}} \right) e^{-\left(j \frac{\omega}{c} r_{i,j}\right)} \right] \quad (4.1.4)$$

$$a_i = -\frac{P_A e^{(j\frac{\omega}{c}x_i)}}{\rho R_{0i}^2} \quad (4.2.5)$$

De esta forma podemos representar el sistema a resolver de forma matricial. Los términos F_i son los términos de la diagonal, los $H_{i,j}$ los de fuera de la diagonal que dependen de los índices y los a_i los términos independientes. El vector de soluciones es \mathcal{X}_i .

$$\begin{bmatrix} F_1 & H_{1,2} & \dots & H_{1,n} \\ H_{2,1} & F_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,1} & \dots & \dots & F_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (4.2.6)$$

Podemos finalmente obtener las amplitudes despejando de (4.2.6):

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & H_{1,2} & \dots & H_{1,n} \\ H_{2,1} & F_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,1} & \dots & \dots & F_n \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

Y así queda determinado el sistema para las amplitudes complejas de una nube de n burbujas.

4.3 Resultados y comentarios

Vamos a hacer varias aclaraciones acerca del código que resuelve el campo de presiones antes de presentar el resultado de las simulaciones.

En primer lugar el código no tiene limitaciones en cuanto a la posición de las burbujas, ya que éstas se definen como parámetros de entrada y no son valores predefinidos. Con el motivo de hacerlo lo más intuitivo posible vamos a representar varios casos para comprobar el comportamiento de la burbujas den

función de su posición e incluso su tamaño. En todos estos casos las burbujas serán coplanarias y estarán en el plano $z=0$ para que la visualización sea lo más intuitiva y completa posible. En cualquier caso podemos si existieran burbujas en otros planos y situaciones y su efecto también sería recogido.

En segundo lugar anticipar una de las limitaciones que tiene el código para interpretar mejor las simulaciones. En la expresión (4.1.3) y en otras en donde aparece la presión radiada, como ya dijimos en las conclusiones del apartado 3, ésta depende de la distancia al centro de la burbuja. Si obviamos los términos de los desfases que también son función del radio y que son de orden unidad, la dependencia es inversamente proporcional. Es evidente que la presión radiada esta definida para distancias mayores que las del propio radio de la burbuja, o dicho de otro modo, dentro de la burbuja la presión radiada carece de sentido. Recopilando nos encontramos con que si pretendemos representar en todo el espacio la presión total y en concreto la radiada debemos discriminar las posiciones de las burbujas para no representar aquellos puntos que se encuentren dentro de cada burbuja. Esos puntos, tal y como esta definida la presión radiada no tienen sentido ya que al disminuir la posición al centro de la burbuja, es decir a 0, la presión radiada se va al infinito. Nos encontramos entonces ante un problema complicado de resolver y que trataremos en las conclusiones. Es por ello que en las simulaciones se debe asegurar que las burbujas están lo suficientemente lejos como para no solaparse sus radios y que existe una zona que delimita la zona interior de la burbuja y que se siente por las perturbaciones cercanas en la que la presión se comporta de forma anormal. Es por ello que intuitivamente se puede ver con facilidad el radio de la burbuja sin necesidad de definirlo previamente.

- *Caso 1: Dos burbujas del mismo tamaño y situadas a una cierta distancia*

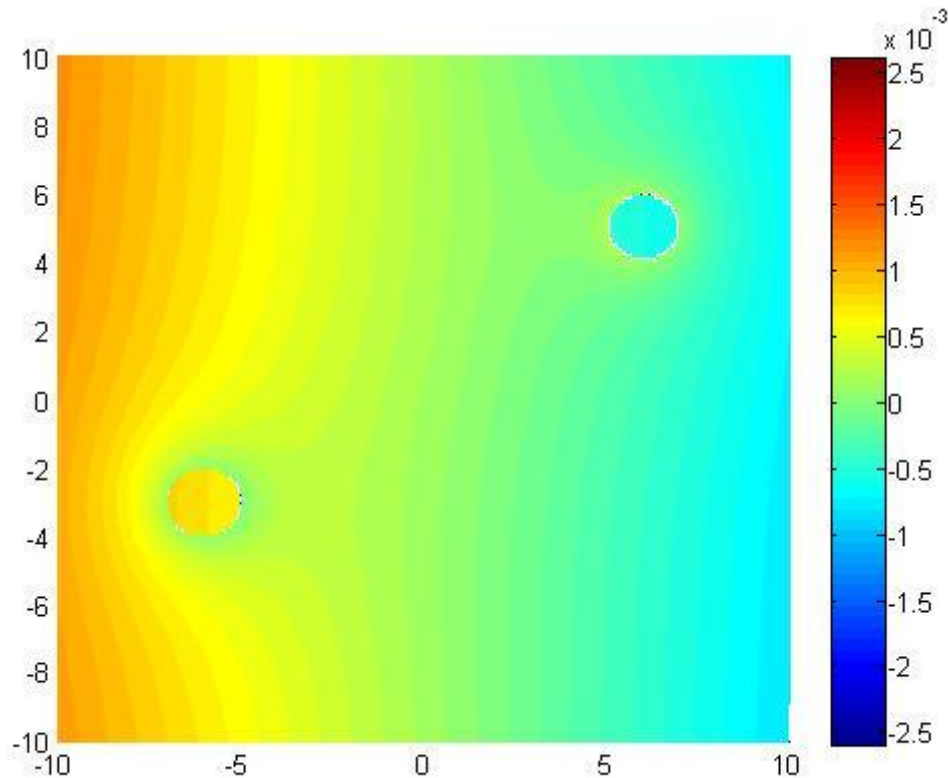


Figura 30. 2 burbujas $t=0$

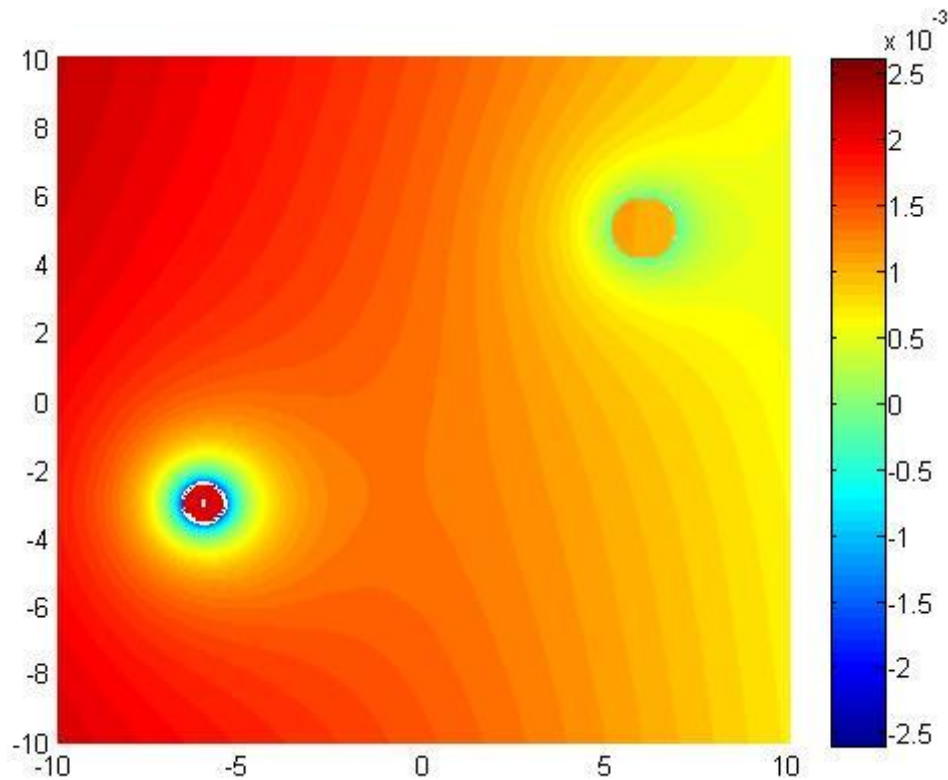


Figura 31. 2 burbujas $t=0,7$

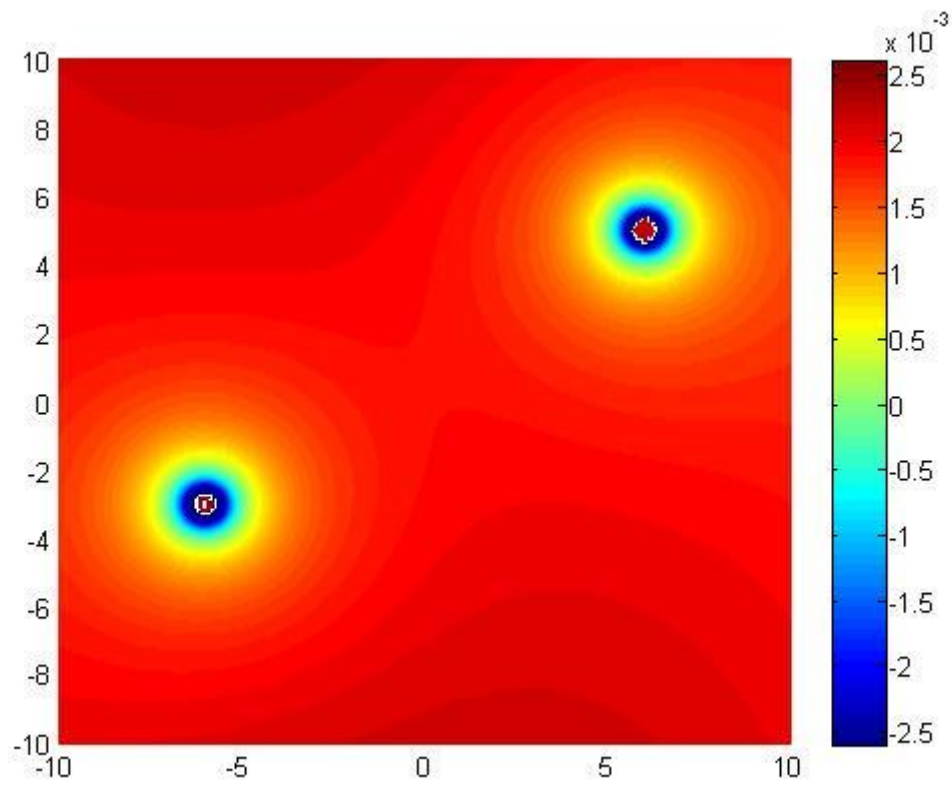


Figura 32. 2 burbujas $t=1,5$

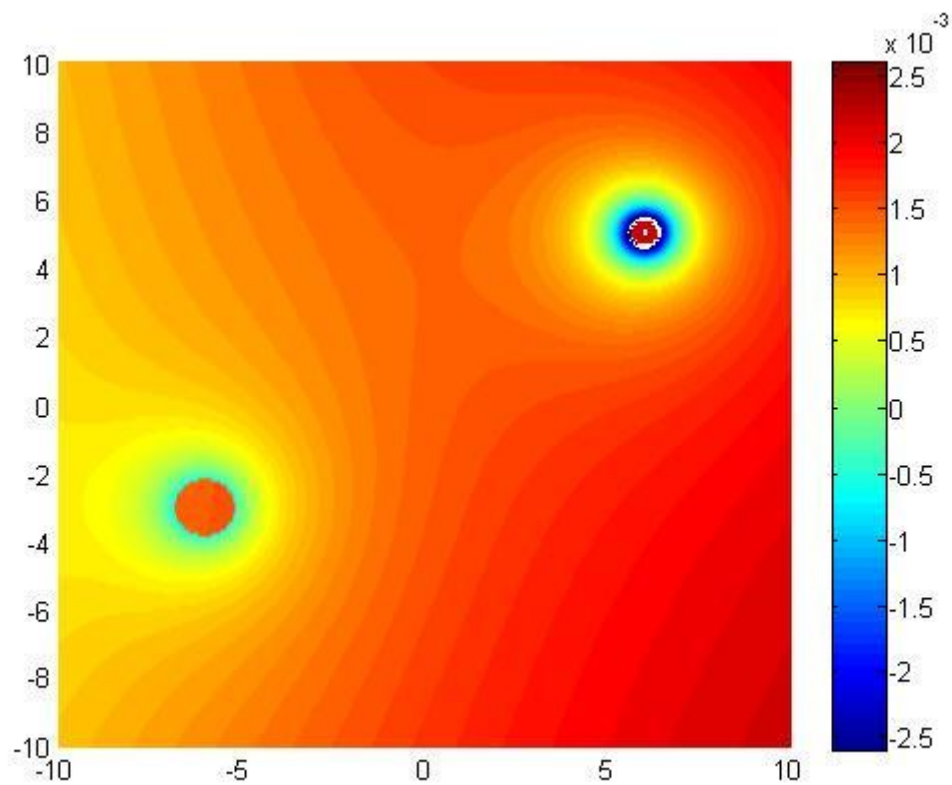


Figura 33. 2 burbujas $t=2,2$

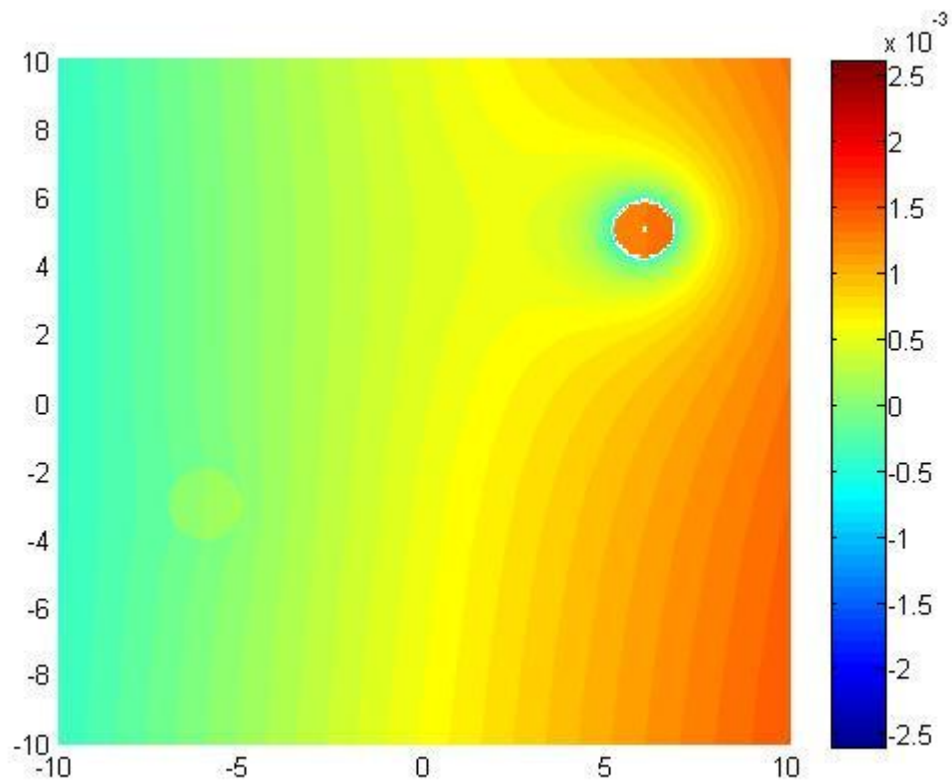


Figura 34. 2 burbujas $t=2,8$

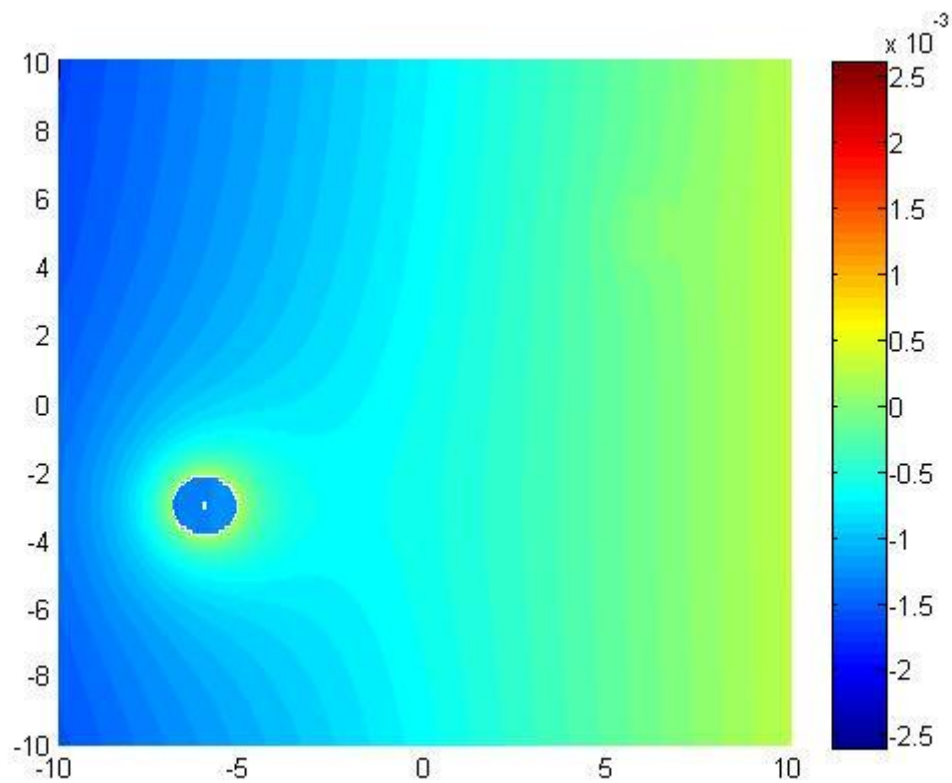


Figura 35. 2 burbujas $t=3,4$

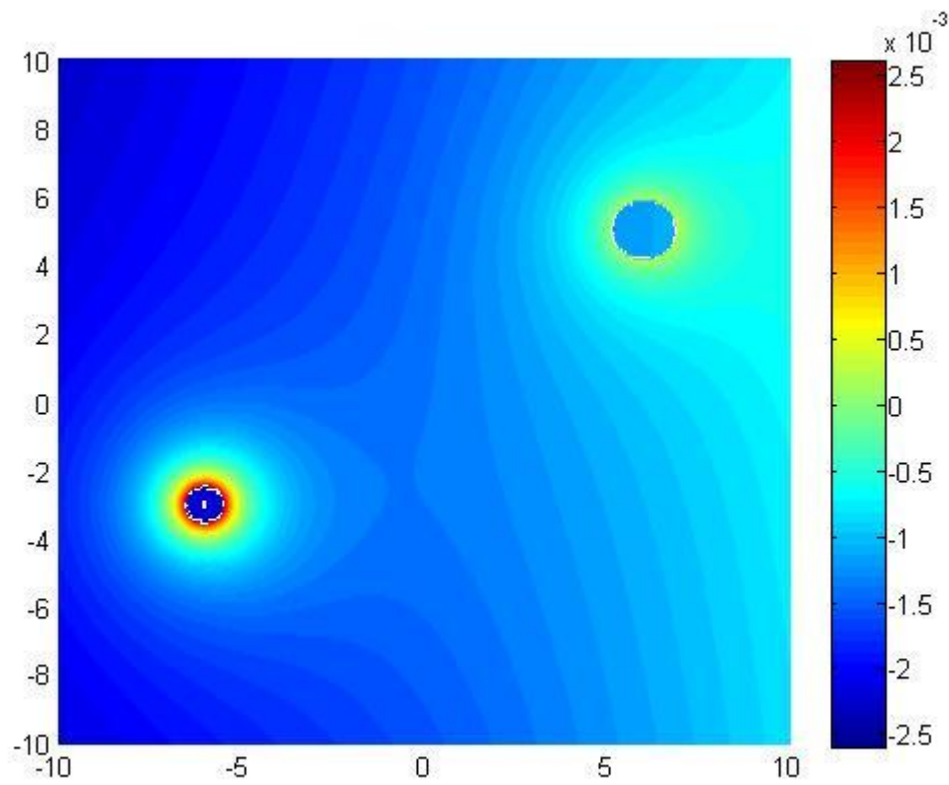


Figura 36. 2 burbujas $t=4$

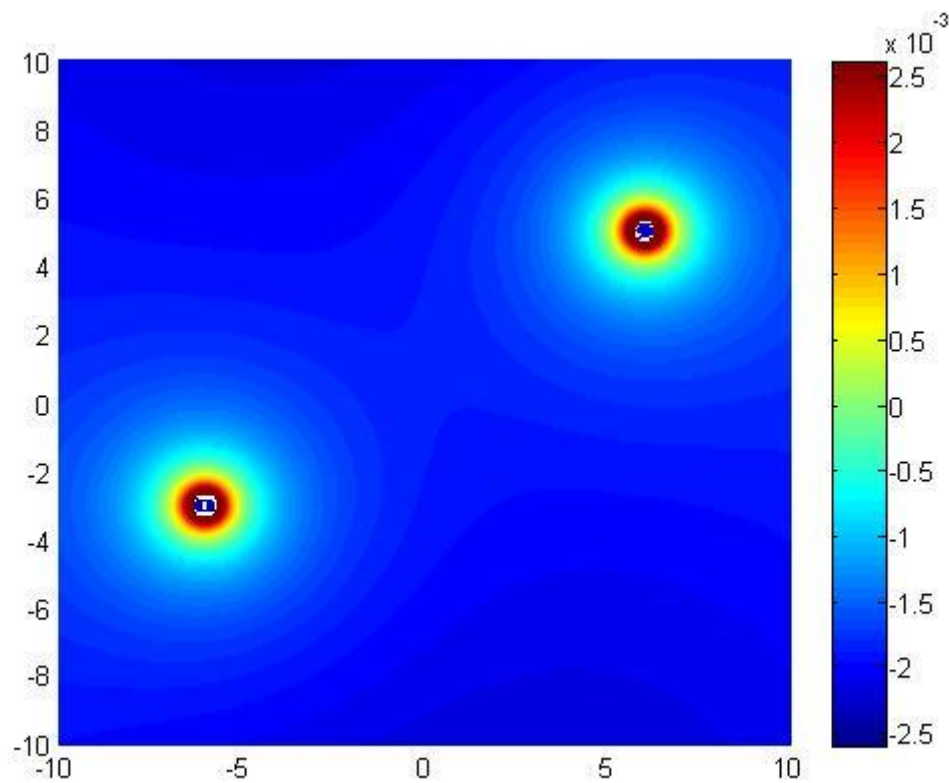
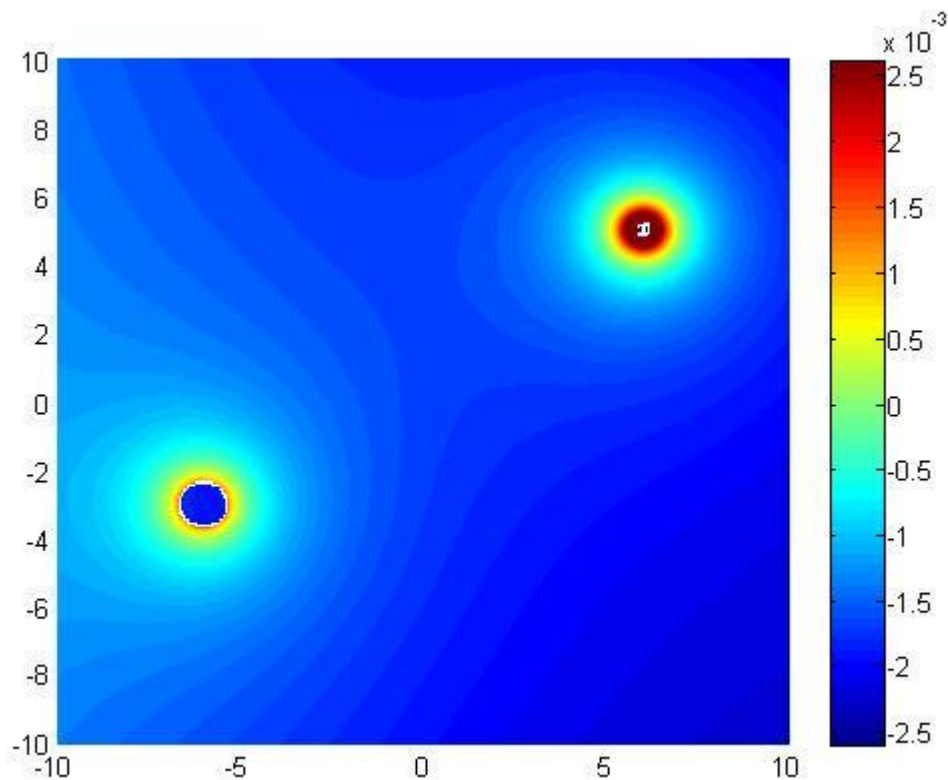


Figura 37. 2 burbujas $t=4,7$

Figura 38. 2 burbujas $t=5,1$

En primer lugar como el título del caso dice se trata de dos burbujas del mismo tamaño y en particular de radio adimensional 1, es decir, radio el de referencia de 10 micras. Dicho radio se puede observar fácilmente debido a la limitación del código comentada anteriormente. En cualquier caso no falsean los resultados si no tenemos en cuenta esa zona que se puede ver a simple vista que coincide con una esfera de radio unidad.

En segundo lugar podemos ver como las dos burbujas se comportan de manera similar a una sola burbuja, recordar el apartado 3, ya que están lo suficientemente lejos como para no perturbarse en demasía. Podemos ver que las burbujas al ser del mismo tamaño presentan órdenes de magnitud de la presión iguales y que únicamente presentan desfases al estar las dos burbujas en coordenadas x diferentes y la onda acústica les llega en tiempos diferentes.

- Caso 2: Dos burbujas del mismo tamaño en la misma coordenada x

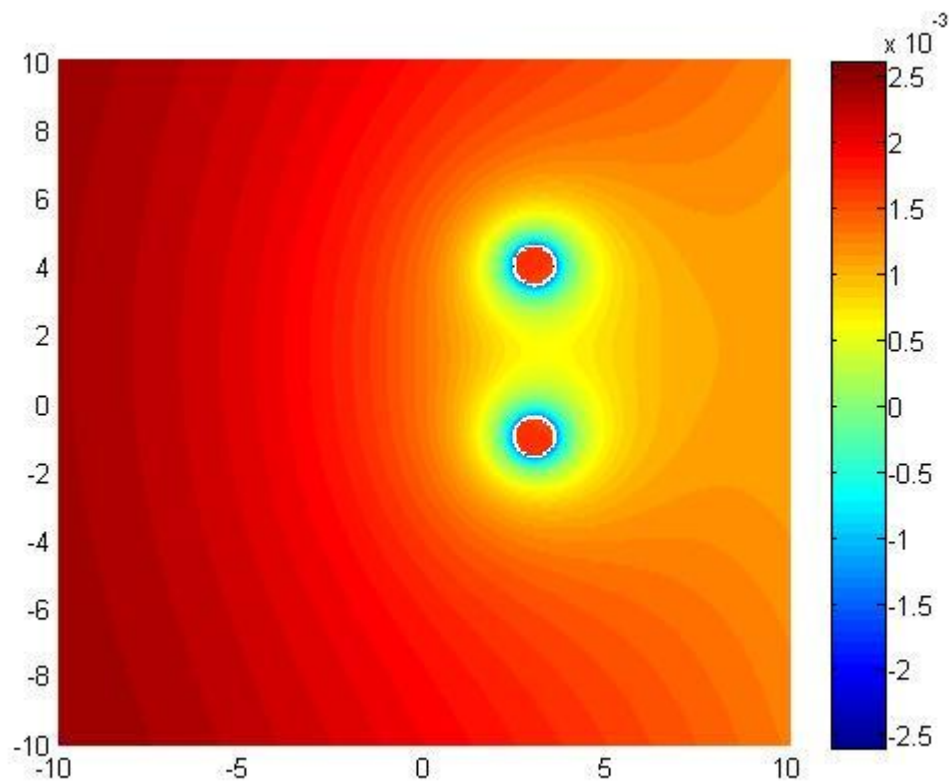


Figura 39. 2 burbujas con misma coordenada x, $t=1$

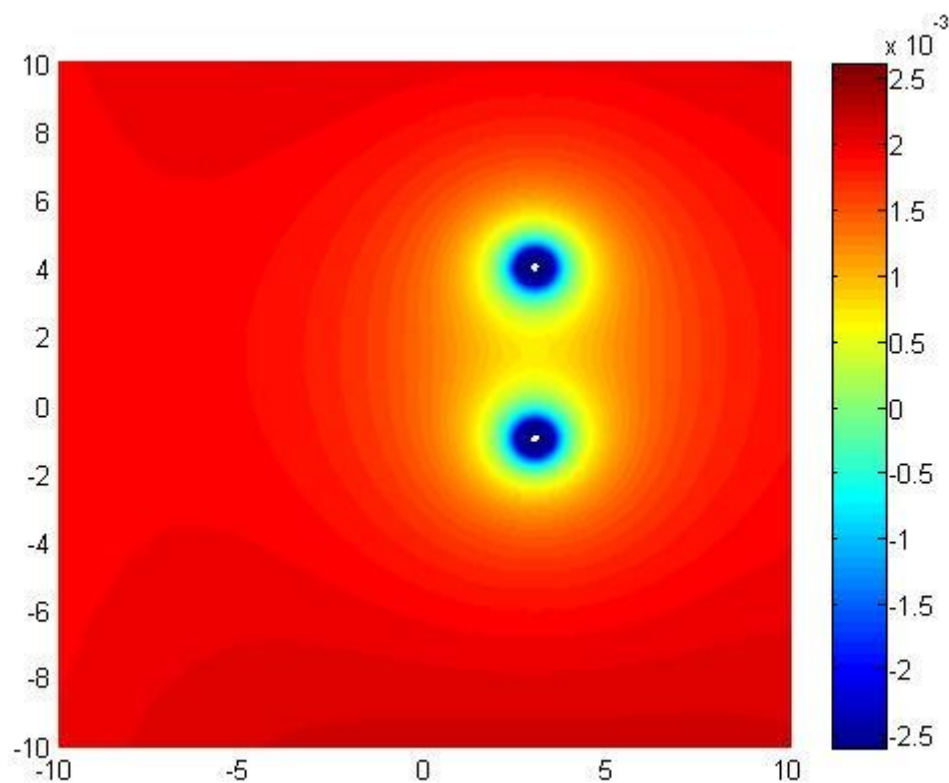


Figura 40. 2 burbujas con misma coordenada x, $t=1,7$

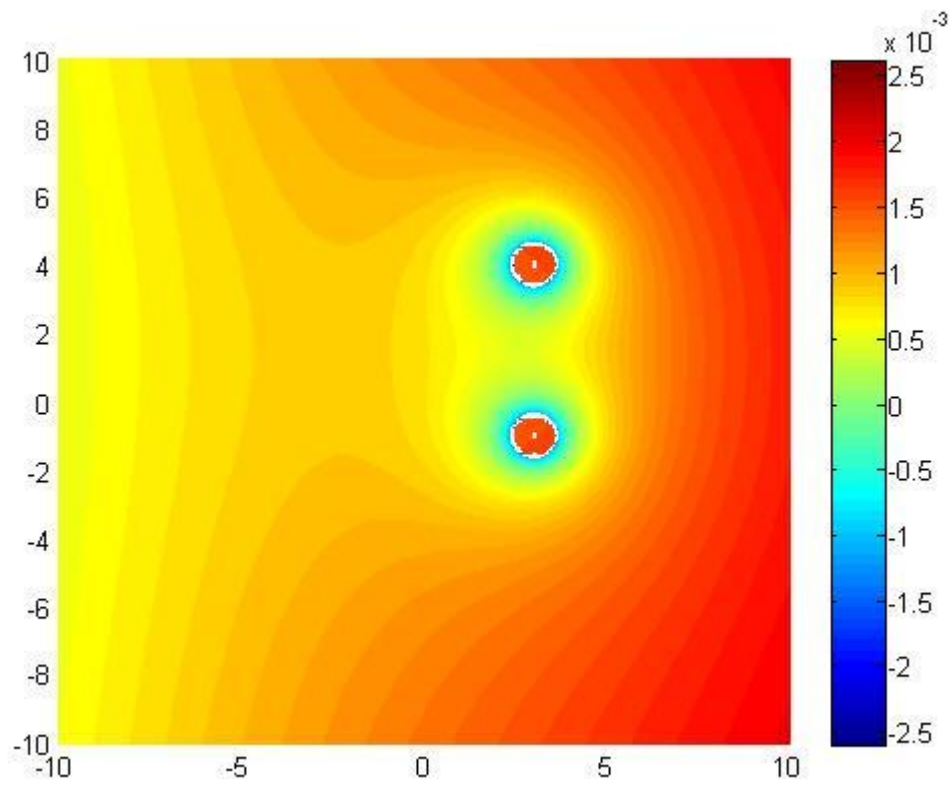


Figura 41. 2 burbujas con misma coordenada x, $t=2,4$

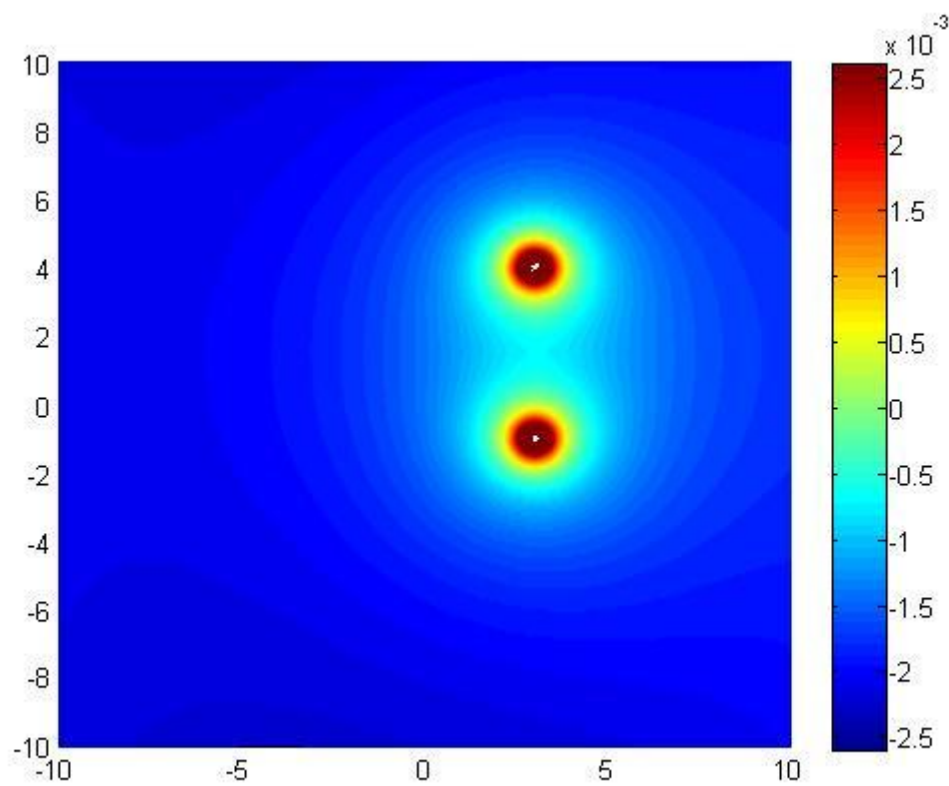


Figura 42. 2 burbujas con misma coordenada x, $t=4,7$

Como podemos ver se trata de dos burbujas idénticas a la misma coordenada x . Es de suponer que la presión radiada sea la misma y oscilen a la vez como al no haber desfase respecto a la onda incidente. Esto se puede ver en el código que resuelve las amplitudes complejas al ver que éstas salen del mismo valor y signo.

- *Caso 3: Dos burbujas de diferente tamaño en la misma coordenada x*

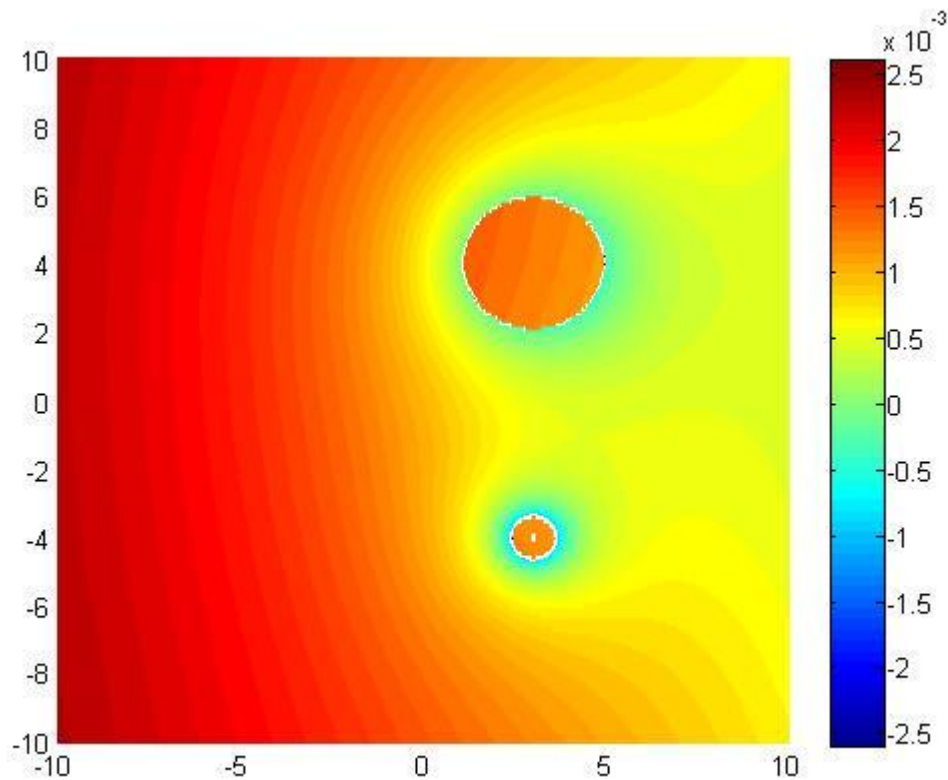


Figura 43. 2 burbujas de diferente tamaño x , $t=0,7$

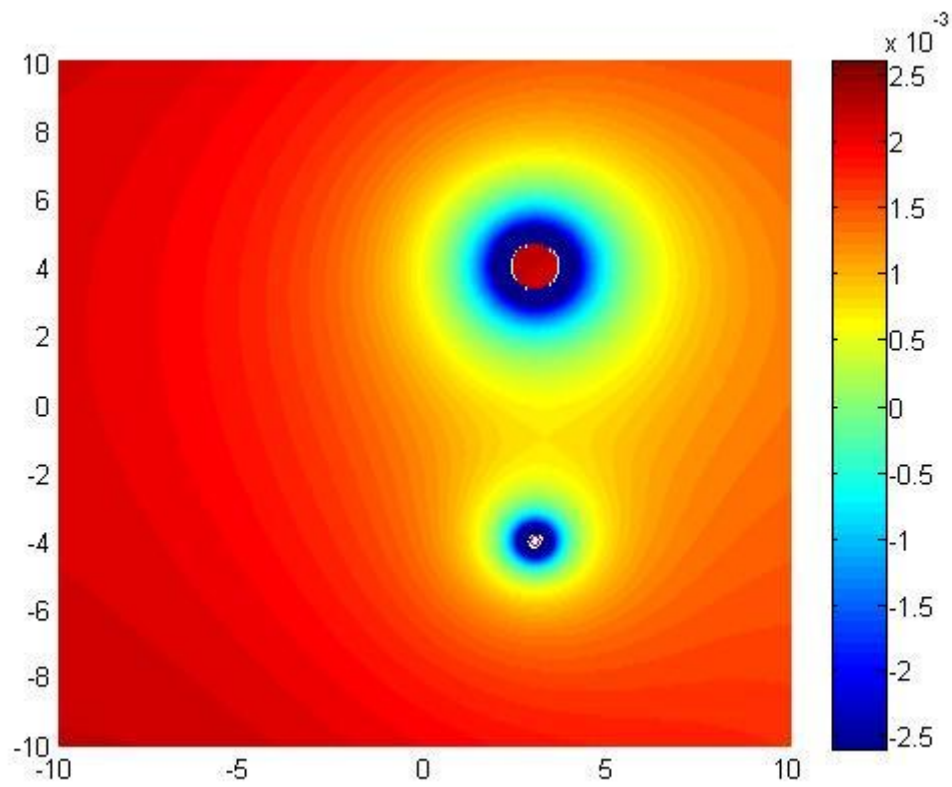


Figura 44. 2 burbujas de diferente tamaño x , $t=1,4$

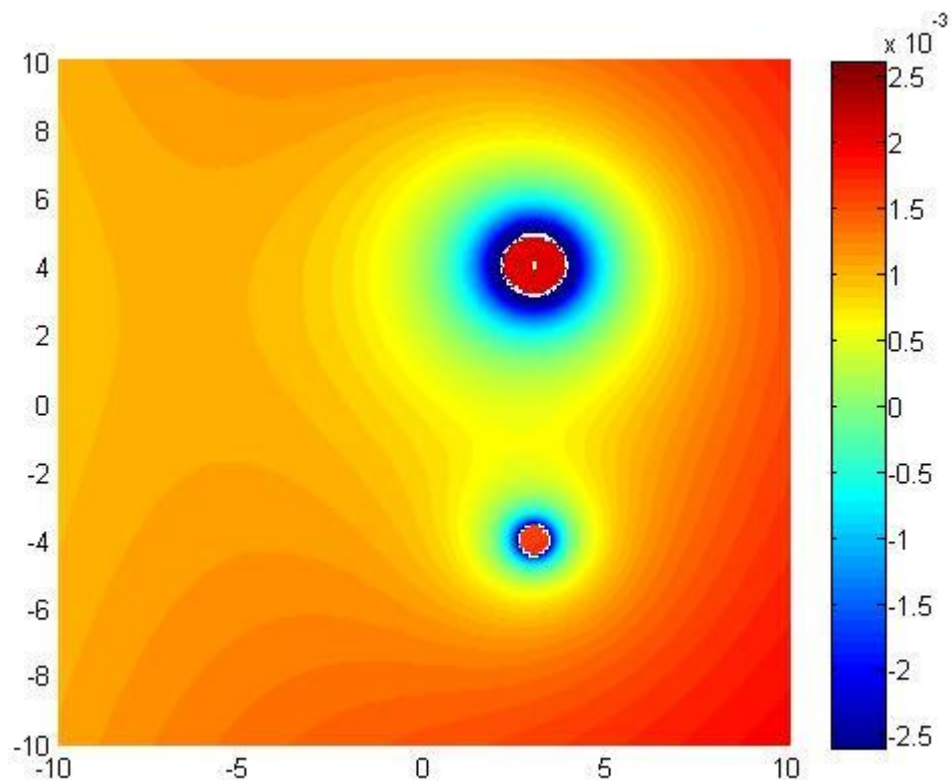


Figura 45. 2 burbujas de diferente tamaño, $t=2,2$

Como puede observarse el tamaño de la burbuja influye en el campo de presiones exterior al ser este un poco más intenso. El tamaño relativo de las burbujas es que la grande es 2,5 veces mayor. El código muestra que a pesar de de estar en la misma coordenada x las amplitudes complejas son totalmente diferentes ya que dependen de los radios de las burbujas.

- Caso 4: Tres burbujas en posiciones aleatorias del mismo tamaño

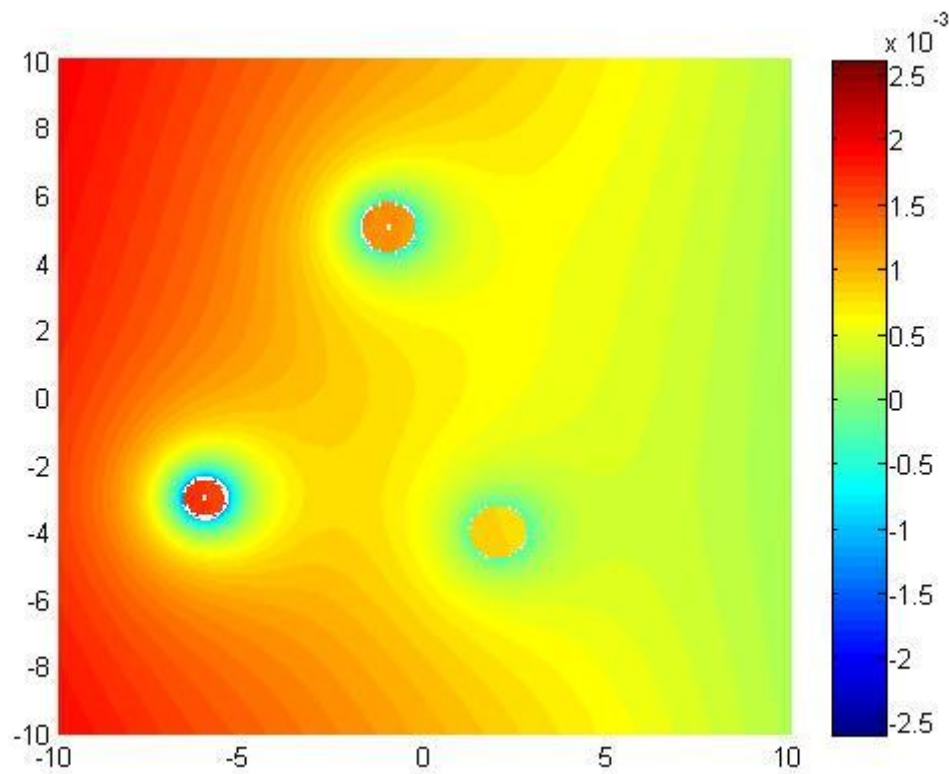
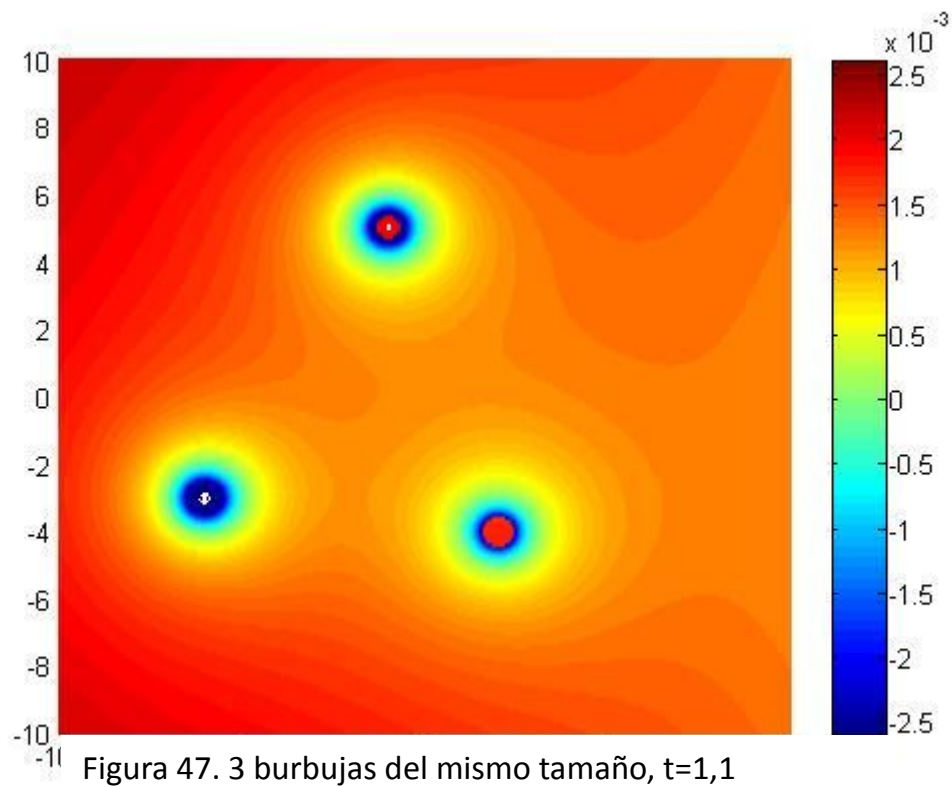
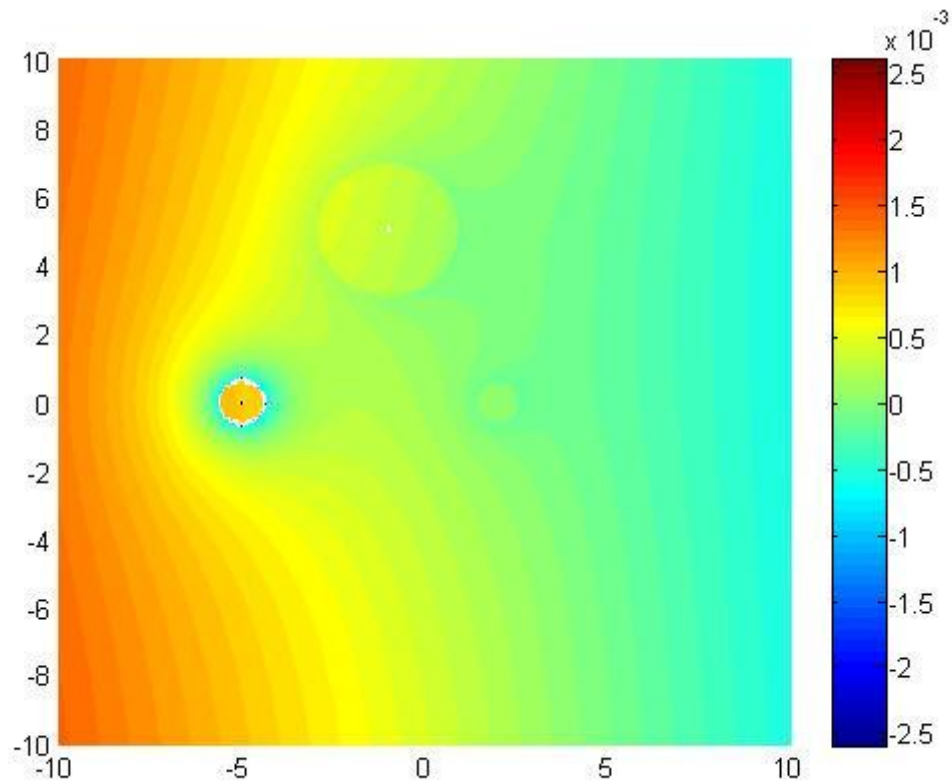


Figura 46. 3 burbujas del mismo tamaño, $t=0,5$



- Caso 5: Tres burbujas de diferente tamaño cercanas



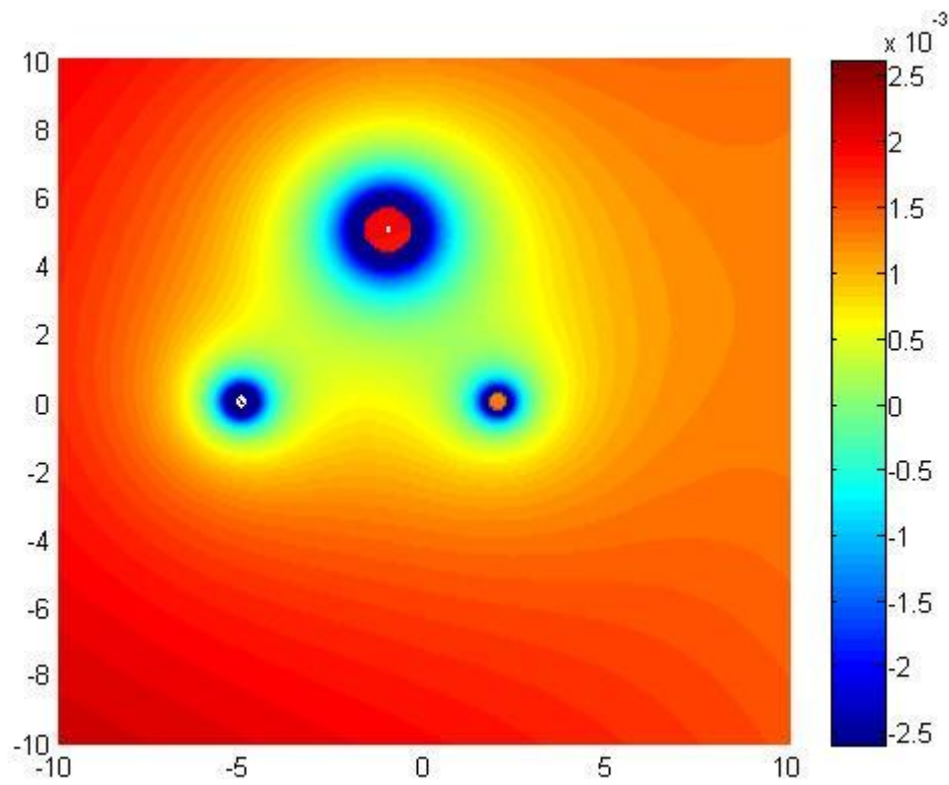


Figura 50. 3 burbujas de diferente tamaño, $t=1,2$

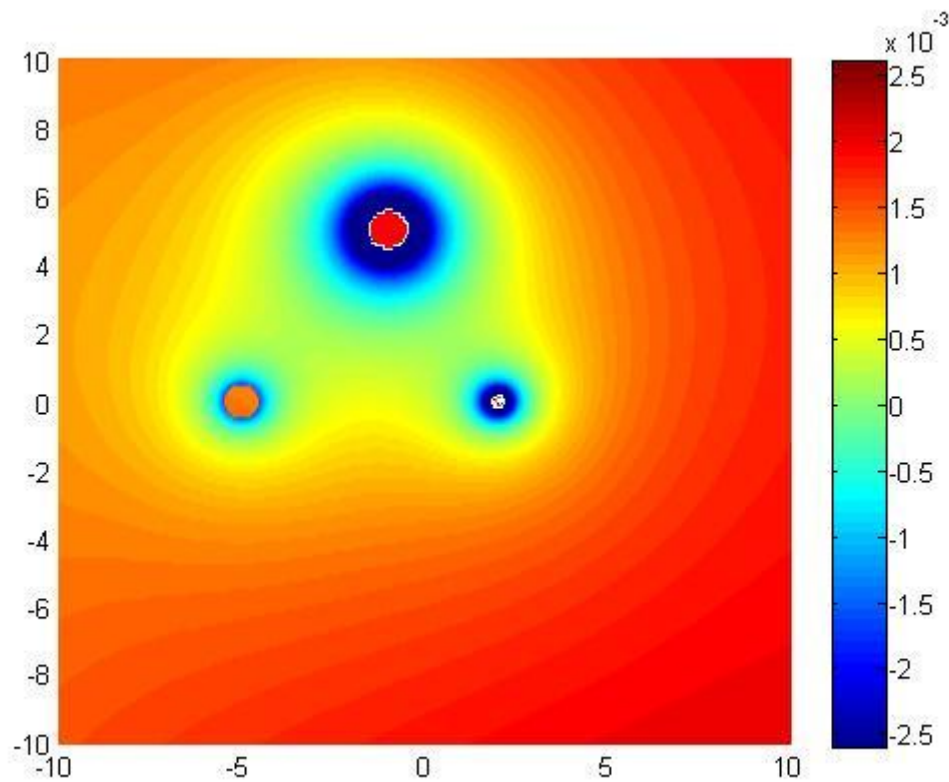


Figura 51. 3 burbujas de diferente tamaño x , $t=1,8$

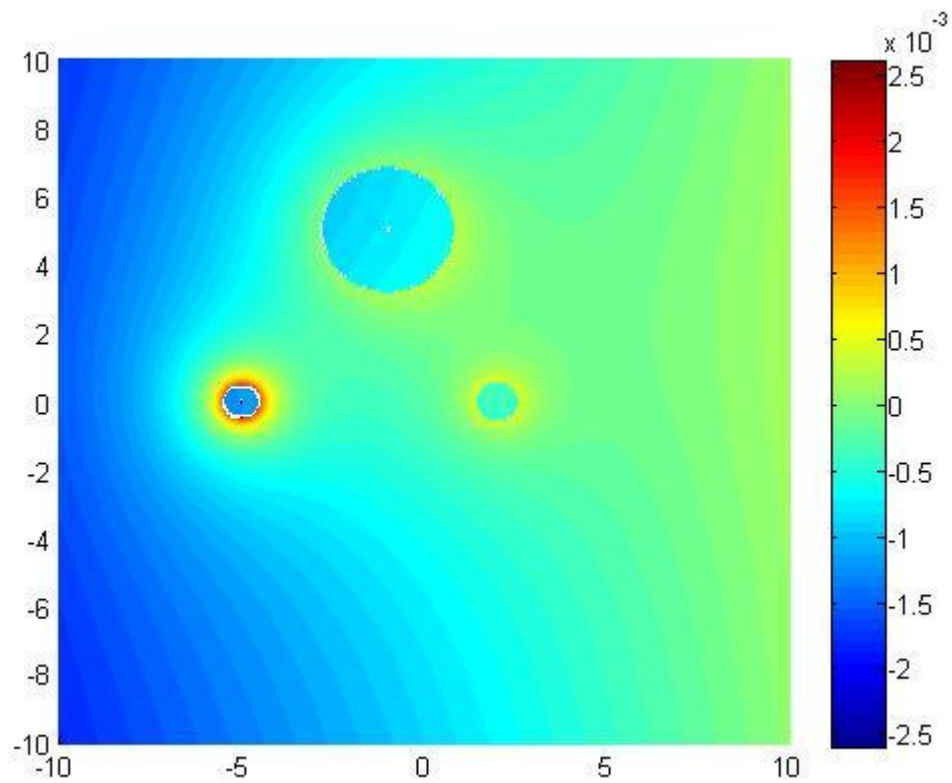


Figura 52. 3 burbujas de diferente tamaño, $t=3,5$

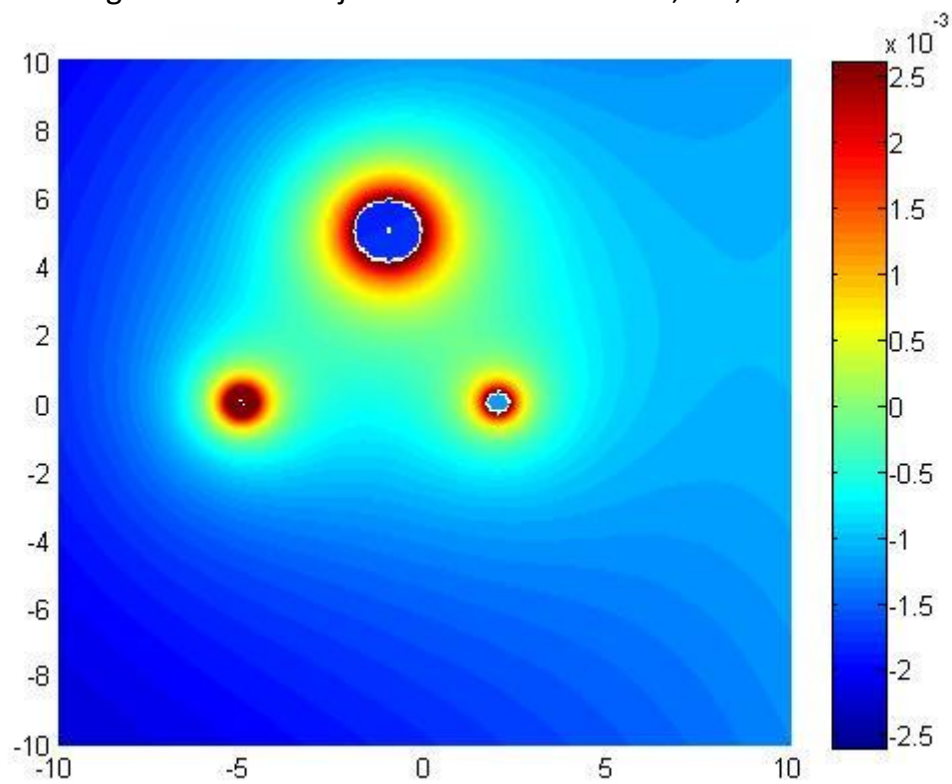


Figura 53. 3 burbujas de diferente tamaño x , $t=4,2$

Se puede observar que el código se comporta correctamente. La burbuja grande parece dominar el campo de presiones y las burbujas cercanas se ven influenciadas por ella.

- Caso 6: 6 burbujas en diferentes posiciones y de diferentes tamaños

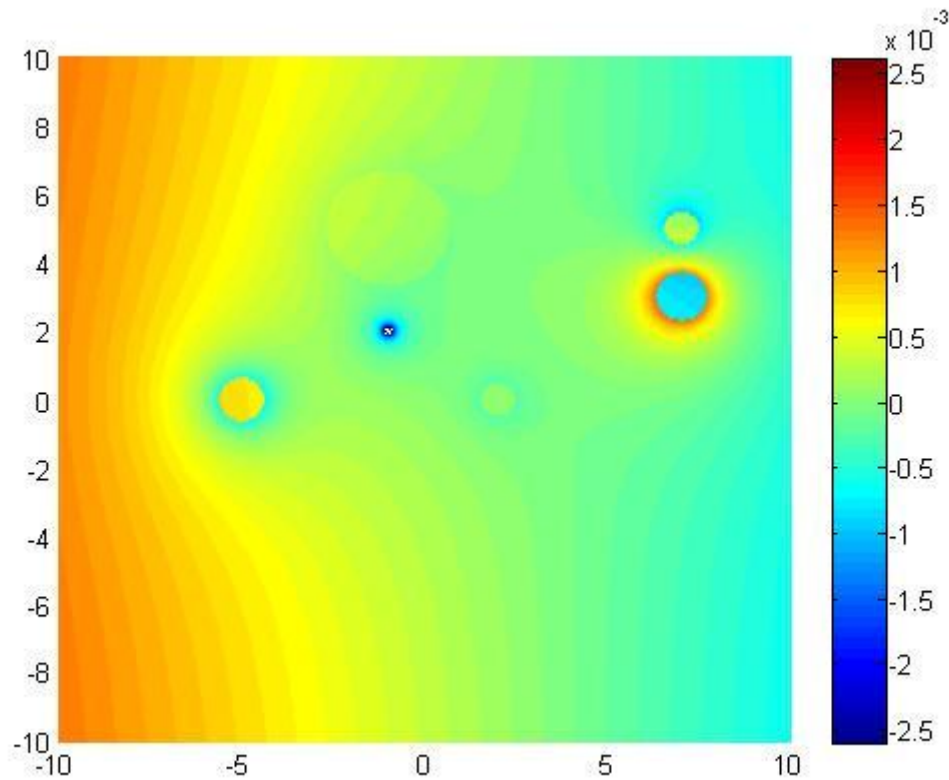


Figura 54. 6 burbujas x , $t=0$

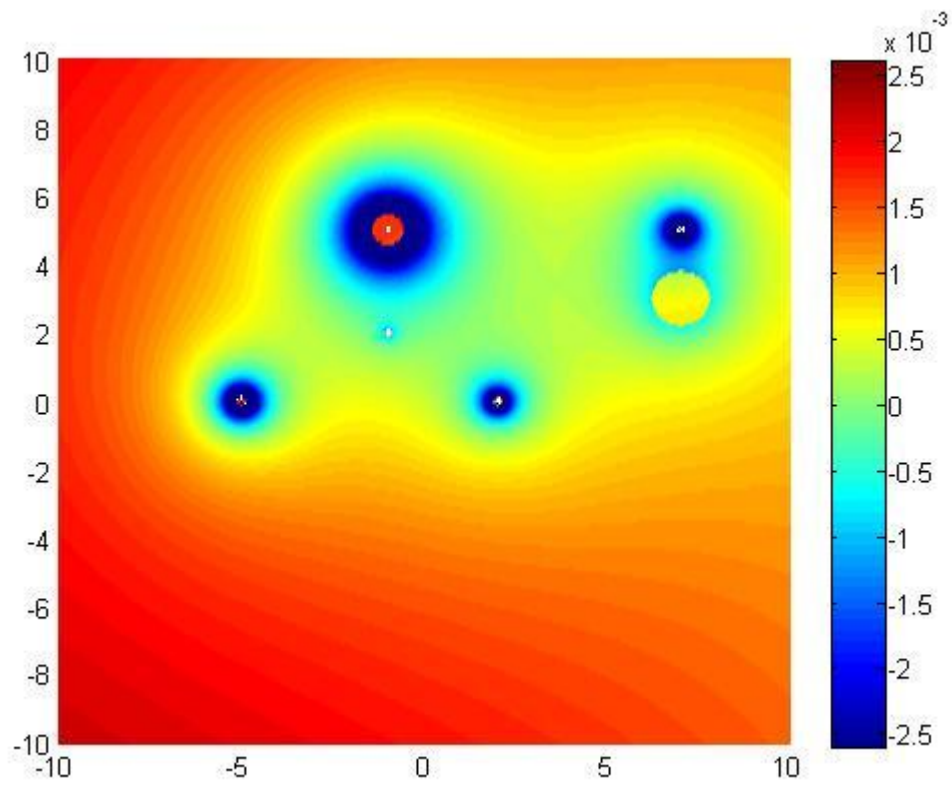


Figura 55. 6 burbujas, $t=1,2$

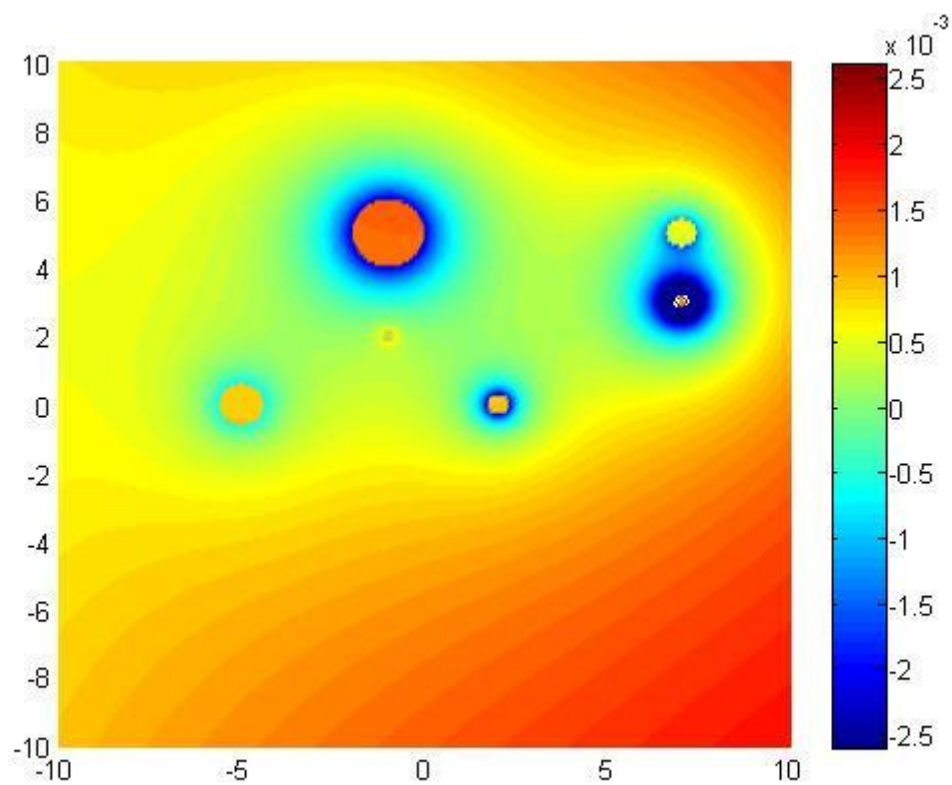


Figura 56. 6 burbujas, $t=2,1$

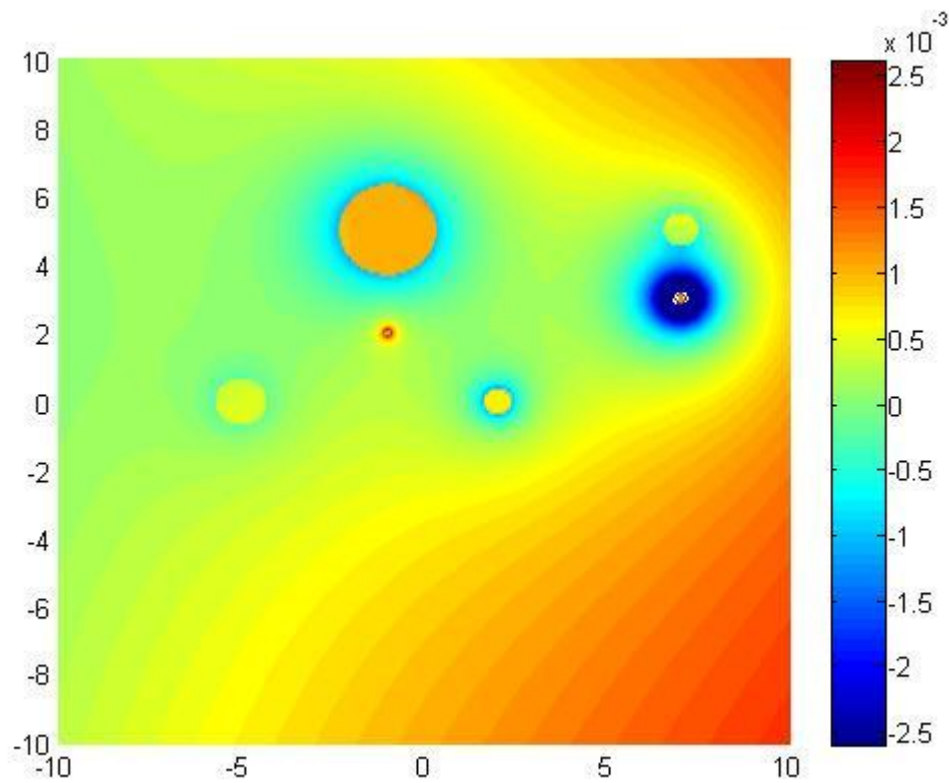


Figura 57. 6 burbujas, $t=2,4$

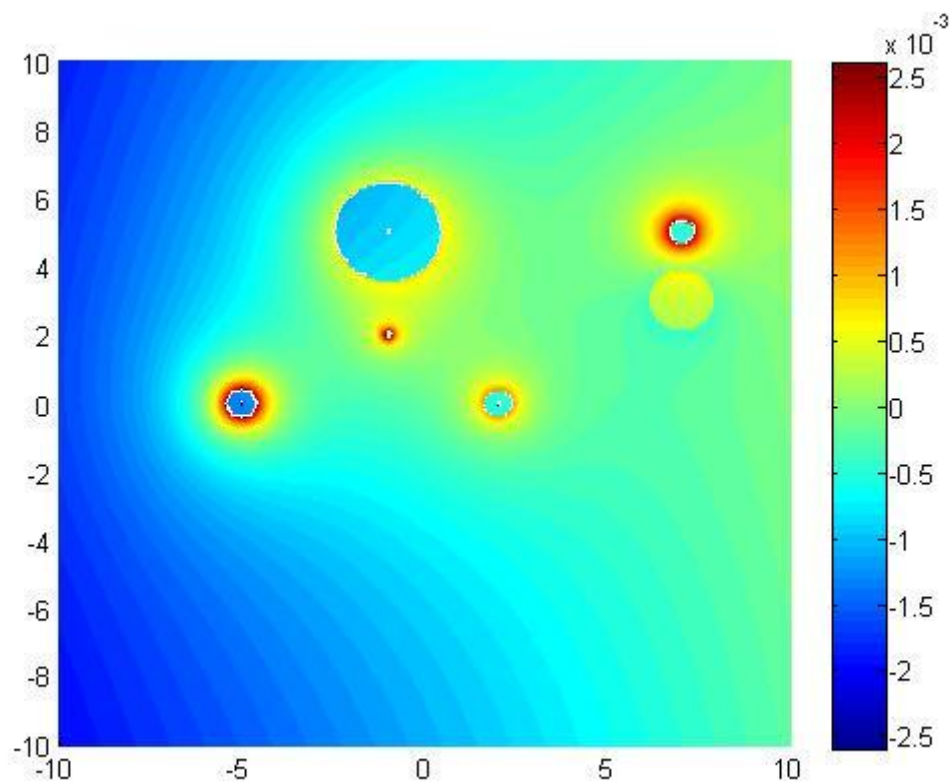
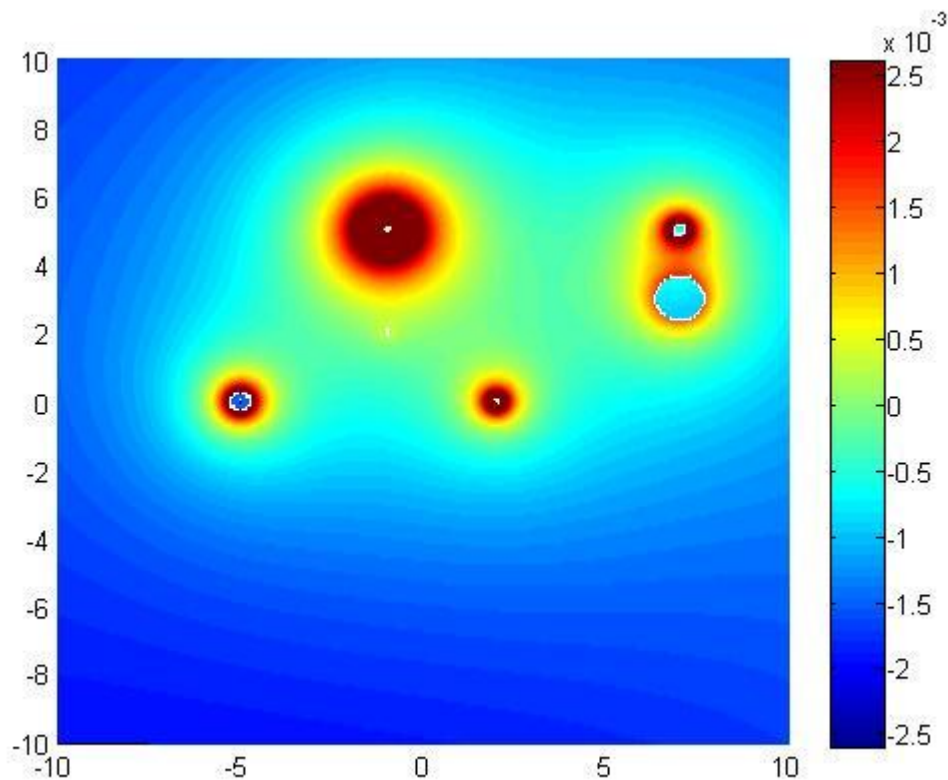


Figura 58. 6 burbujas, $t=3,6$

Figura 59. 6 burbujas, $t=4,6$

Nuevamente se puede ver que el código no tiene problemas en representar 3 o 6 burbujas y a priori ningún número de ellas. Además comentar que el tiempo de representación no aumenta considerablemente y prácticamente se muestran instantáneamente.

En primer lugar se puede observar que se crea un área de dispersión que engloba todas las burbujas en las que el campo de presiones está perturbado respecto a la onda acústica.

En segundo se pueden ver dos grupos de burbujas entre los que se produce una fuerte interacción, esto se nota sobre todo en las burbujas adyacentes como la central grande con la más pequeña y las dos de tamaños similares a la derecha del todo. Se puede ver como las oscilaciones van casi siempre en contrafase ya que cuando una produce un campo de presiones ascendente la otra lo produce al revés y por otro lado que la burbuja dominante en ambos casos es la de mayor tamaño como puede apreciarse en las del centro.

Por último se puede ver que en estos grupos cercanos se vuelve a crear un campo de presiones que está perturbado respecto al de las inmediaciones debido a la superposición de los campos de las dos burbujas adyacentes.

4.4 Conclusiones finales

En líneas generales se puede ver que el código responde a las expectativas y parece comportarse correctamente. Como comentamos antes de mostrar las simulaciones tiene ciertas limitaciones.

La solución para el problema de las zonas interiores de las burbujas se solucionaría con un mallado de todo el dominio de computación en el que se determinaran las posiciones de las burbujas y los nodos donde se calcularía la presión y aquellas zonas excluidas del cálculo (las zonas interiores de la burbuja). Implementar un código que calcule todo eso en un espacio tridimensional puede ser una tarea complicada y en cualquier caso podemos recurrir a programas con interfaz gráfica en el que el diseño de la malla de computación se puede hacer más intuitivo (Ansys). Desde un punto de vista purista sería la solución ideal ya que no se produciría ningún tipo de incoherencia.

La solución por la que he optado es delimitar el valor máximo de las presiones. Teniendo en cuenta el apartado 3 en el que se dan valores característicos de la presión podemos hacernos a la idea de los valores típicos de la presión adimensional. Delimitando esos valores evitamos representar aquellos puntos en los que la presión se dispara al infinito.

Por otro lado el código permite representar burbujas en todas las posiciones y mostrar los diferentes planos del espacio para ver la presión. En nuestro caso como ya adelantamos hemos representado el plano $z=0$ y hemos supuesto que las burbujas son coplanarias. Para el caso de 3 burbujas podría representar un plano cualquiera, ya que se siempre puede definir un plano que pase por 3 puntos, pero en el caso de 6 parece difícil encontrar un caso que de la casualidad que las 6 burbujas estén en un mismo plano. Nosotros en cambio hicimos la suposición de que efectivamente las 6 burbujas estaban situadas en el plano $z=0$ ya que es más intuitivo de representar. Se podría entonces implementar un código que determinase los grupos de planos que interseccionan con 1, 2 y hasta 3 burbujas con relativa facilidad y conocimientos geométricos. Este código determinaría planos de preferente importancia para la representación de la presión y el comportamiento de las burbujas. En cualquier caso con nuestro código permite recoger el efecto de burbujas que estén en otros planos a pesar de que no salgan representadas, también evidentemente representar cualquier plano del espacio y obtener los valores numéricos de la presión en cualquier punto del espacio.

4.5 Aplicaciones y líneas de continuación

Una vez comprobado y evaluado la robustez del código implementado y posibles mejoras podemos definir varias líneas de continuación y posibles aplicaciones para problemas mucho más amplios.

En primer lugar parece claro que hemos conseguido definir, calcular y representar el campo de presiones alrededor de una o varias burbujas excitadas por una onda acústica y con ciertas hipótesis en la física del problema. En nuestro caso la excitación se hace mediante una onda senoidal con una única frecuencia fundamental ω . Podríamos sin embargo encontrarnos el caso de la excitación producida por una onda complicada, paquetes de ondas, ondas cuadradas, pulsos de onda etc. En cualquier caso el análisis de Fourier nos podría descomponer la onda compleja en armónicos de diferentes frecuencias e importancias. Nótese que el problema radicaría en calcular las diferentes amplitudes complejas de las oscilaciones $\mathcal{X}(\omega)$ que dependen de la frecuencia y superponer las soluciones utilizando técnicas de Fourier.

En segundo lugar una vez determinado el campo de presiones podemos calcular el gradiente de presión ∇P para aplicar las fórmulas que calculan las fuerzas sobre las burbujas, conocidas como fuerzas de Bjerkness y cuyas expresiones se pueden ver en diferentes libros y documentos que se citan en la bibliografía. Estas fuerzas servirían para ver el movimiento que provocarían las ondas de presión en las burbujas o incluso los movimientos que se auto inducen burbujas cercanas y estudiar las trayectorias en función de la amplitud de la onda, la frecuencia y otros parámetros.

5. Bibliografía

-*The Acoustic Bubble*, de T.G. Leighton.

-*Apuntes de procesos fluidotérmicos*, de Antonio Luis Sánchez Pérez, Escuela Politécnica Superior Carlos III de Madrid.

-*Apuntes de mecánica de fluidos*, de Carlos Martínez Bazán, Immaculada Iglesias Estradé y Antonio Luis Sánchez Pérez, Escuela Politécnica Superior Carlos III de Madrid.

-*Fluid Mechanics*, de L.D.Landau.

- *Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids*, paper de Andrea Prosperetti (1976)

- *Experimental investigation on reversal of secondary Bjerknes force between two bubbles in ultrasonic standing wave*, paper de Kenji Yoshida (2011)